Chapter 4: Linear Block Codes

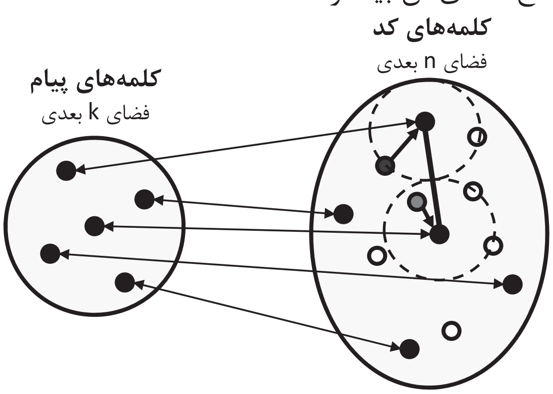
Hamid Meghdadi

Semnan University

hamid.meghdadi@gmail.com

The importance of minimum distance

- هرچه فاصله‌ی حداقل یک کد بیشتر باشد، قابلیت تشخیص و اصلاح خطای آن بیشتر است:

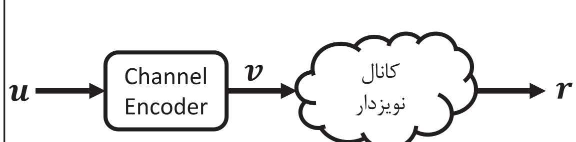


- خطا در صورتی تشخیص داده نمی‌شود که $\boldsymbol{v}$ به علت بروز خطا به$\boldsymbol{r}$ تبدیل شود که خود یک codeword معتبر دیگر باشد.
  - بین هر دو codeword معتبر حداقل d_{min} بیت اختلاف وجود دارد.
  - قابلیت تشخیص خطا:

$$d = d_{min} - 1$$

- خطا در صورتی اصلاح نمی‌شود که $\boldsymbol{v}$ به علت بروز خطا به$\boldsymbol{r}$ تبدیل شود که به یک codeword معتبر دیگر نزدیک تر باشد.
  - بین هر دو codeword معتبر حداقل d_{min} بیت اختلاف وجود دارد.
  - قابلیت اصلاح خطا:

$$t = \left\lfloor \frac{d_{min} - 1}{2} \right\rfloor$$



Generator matrix

➢ برای هر کد بلوکی خطی (n,k):

$$\boldsymbol{u} = [u_0\ u_1 \cdots u_{k-1}]$$
$$\boldsymbol{v} = [v_0\ v_1\ v_2 \cdots v_{n-1}]$$

$$\boldsymbol{v} = u_0\boldsymbol{g_0} + u_1\boldsymbol{g_1} + \cdots u_{k-1}\boldsymbol{g_{k-1}}$$

ماتریس مولد
Generator matrix
$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g_0} \\ \boldsymbol{g_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{g_{k-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & \cdots & g_{0,n-1} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k-1,0} & g_{k-1,1} & g_{k-1,2} & \cdots & g_{k-1,k} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}.\boldsymbol{G}$$

➢ با تعویض هریک از سطرهای $\boldsymbol{G}$ با یک ترکیب خطی از سطرهای $\boldsymbol{G}$ می‌توان به یک کد معادل رسید.

Example

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{G}_{k\times n} = [\boldsymbol{P}_{k\times n-k} | \boldsymbol{I}_{k\times k}]$$

پیام message u	کلمه‌ی کد codeword v
0000	0000000
1000	1101000
0100	0110100
1100	1011100
0010	1110010
1010	0011010
0110	1000110
1110	0101110

پیام message u	کلمه‌ی کد codeword v
0001	1010001
1001	0111001
0101	1100101
1101	0001101
0011	0100011
1011	1001011
0111	0010111
1111	1111111

Example

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- جمع هیچ $d_{min}-1$ ستون از $\boldsymbol{H}$ برابر صفر نخواهد شد.
- می‌توان d_{min} ستون از $\boldsymbol{H}$ را یافت که جمع آن‌ها برابر صفر شود.

  - در این مثال d_{min} چقدر است؟

Exercise: Building syndrome table

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- تعداد کل کلمه‌های کد معتبر: $2^3 = 8$
- تعداد کل error pattern ها: $2^7 = 128$
- تعداد کل سندروم‌ها: $2^4 = 16$

Error pattern	Syndrome
e	S
0000000	0000
1000000	1000
0100000	0100
0010000	0010
0001000	0001
0000100	0111
0000010	1011
0000001	1101

Error pattern	Syndrome
e	S
1100000	1100
1010000	1010
1001000	1001
1000100	1111
1000010	0011
1000001	0101
0110000	0110
0011000	0011

- $\boldsymbol{r} = [0011011]$
  - $\boldsymbol{s} = [0101]$
  - $\boldsymbol{v} = [10011010]$

Example

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = 1, A_1 = 0, A_2 = 0, A_3 = 7$$
$$A_4 = 7, A_5 = 6, A_6 = 0, A_7 = 1$$

$$A(z) = 1 + 7z^3 + 7z^4 + z^7$$

u	v	u	v
0000	0000000	0001	1010001
1000	1101000	1001	0111001
0100	0110100	0101	1100101
1100	1011100	1101	0001101
0010	1110010	0011	0100011
1010	0011010	1011	1001011
0110	1000110	0111	0010111
1110	0101110	1111	1111111

Example

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = 1, B_1 = 0, B_2 = 0, B_3 = 0$$
$$B_4 = 7, B_5 = 0, B_6 = 0, B_7 = 0$$

$$B(z) = 1 + 7z^4$$

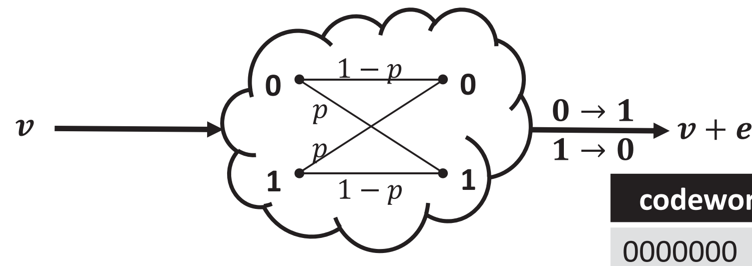
u'	v'
000	0000000
100	1001011
010	0101110
110	1100101
001	0010111
101	1011100
011	0111001
111	1110010

$$\boxed{A(z) = 2^{-(n-k)}(1+z)^n B\left(\frac{1-z}{1+z}\right)}$$

$$2^{-(7-4)}(1+z)^7 B\left(\frac{1-z}{1+z}\right) = \frac{1}{8} \times (1+z)^7 \times \left[1 + 7\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^4\right]$$
$$= 1 + 7z^3 + 7z^4 + z^7$$
$$= A(z)$$

Probability of undetected error over BSC

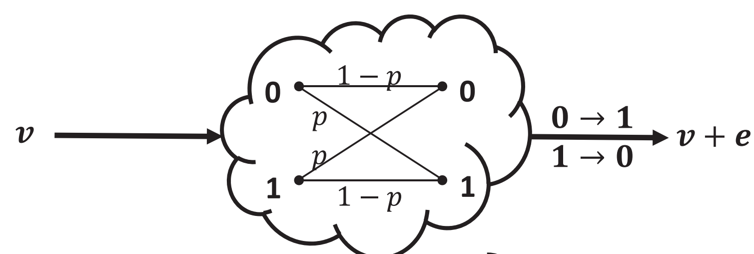
➢ خطای غیر قابل تشخیص: error pattern یک کلمه‌ی کد معتبر و غیر صفر است



codeword	codeword
0000000	**1010001**
1101000	**0111001**
0110100	**1100101**
1011100	**0001101**
1110010	**0100011**
0011010	**1001011**
1000110	**0010111**
0101110	**1111111**

$$P_u = \sum_{i=1}^{n} A_i p^i (1-p)^{n-i}$$

Probability of undetected error over BSC



$$\left.\begin{aligned} P_u &= \sum_{i=1}^{n} A_i p^i (1-p)^{n-i} = (1-p)^n \sum_{i=1}^{n} A_i \left(\frac{p}{1-p}\right)^i \\ A(z) &= \sum_{i=0}^{n} A_i z^i \Rightarrow A\left(\frac{p}{1-p}\right) - 1 = \sum_{i=1}^{n} A_i \left(\frac{p}{1-p}\right)^i \end{aligned}\right\} P_u = (1-p)^n \left[A\left(\frac{p}{1-p}\right) - 1\right]$$

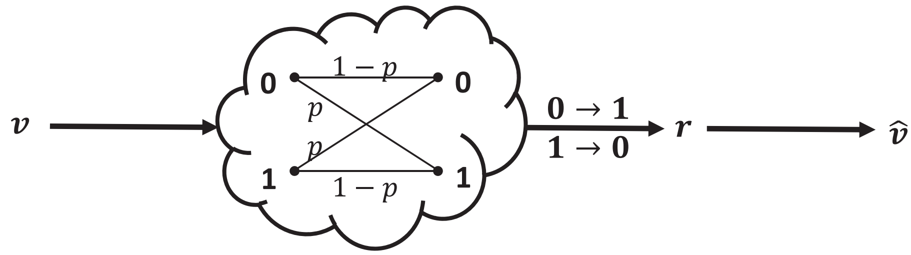
$$\Downarrow$$

$$P_u = 2^{-(n-k)} B(1-2p) - (1-p)^n$$

Probability of decoding error over BSC

- دیکود کردن صحیح: تشخیص درست error pattern
  - یعنی error pattern یکی از error pattern های جدول سندروم باشد

Error pattern
0000000
1000000
0100000
0010000
0001000
0000100
0000010
0000001



$$\begin{aligned} P_{correct} = \; & P(\boldsymbol{e} = 0000000) + P(\boldsymbol{e} = 1000000) \\ & + P(\boldsymbol{e} = 0100000) + P(\boldsymbol{e} = 0010000) \\ & + \cdots + P(\boldsymbol{e} = 0001000) \end{aligned}$$

Probability of decoding error

- فرض کنید α_i تعداد error pattern های انتخاب شده در جدول سندروم با وزن i باشد.

$$P_e = 1 - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i p^i (1-p)^{n-i}$$

Error pattern	
0000000	1100000
1000000	1010000
0100000	1001000
0010000	1000100
0001000	1000010
0000100	1000001
0000010	0110000
0000001	1110000

$\boldsymbol{\alpha_0 = 1}$

$\boldsymbol{\alpha_1 = 7}$

$\boldsymbol{\alpha_2 = 7}$

$\boldsymbol{\alpha_3 = 1}$

$\boldsymbol{\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = 0}$