Chapter 6:

Convolutional Codes

Hamid Meghdadi

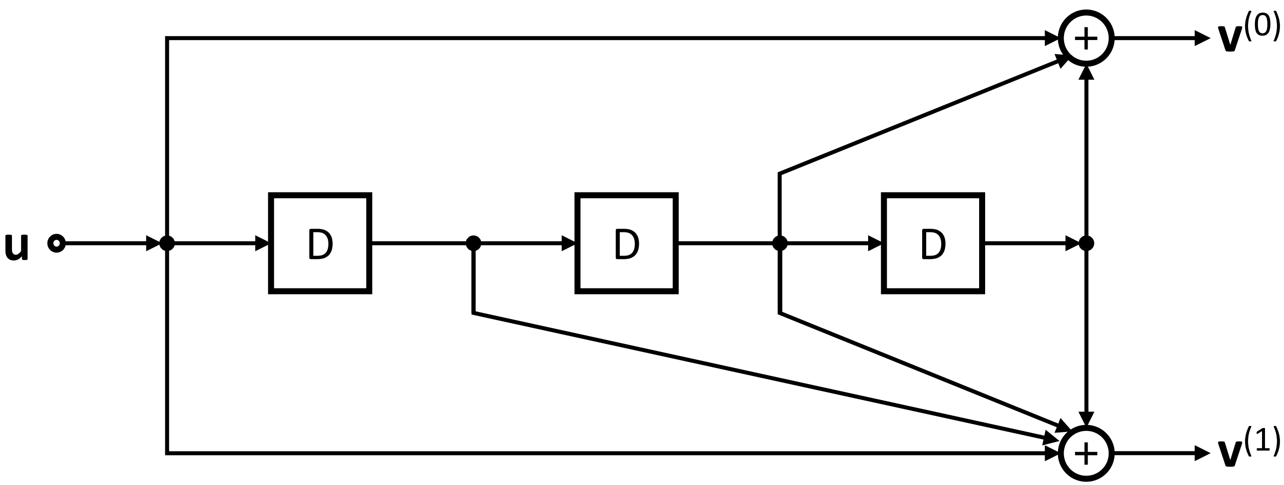
Semnan University

hamid.meghdadi@gmail.com

Introduction

- کدهای کانولوشنی دسته‌ای از کدهای خطی هستند.
- برعکس کدهای بلوکی «حافظه دار» هستند.
- برای یک کد کانولوشنی با memory order (مرتبه‌ی حافظه) m اثر هر بیت ورودی تا m لحظه بعد از اعمال آن در encoder باقی می‌ماند.
- اعداد k و n معمولاً کوچک هستند (R=k/n).
- حالت خاص بسیار مهم: k=1 (بیت‌های وروی تقسیم بندی نمی‌شوند).
- دستیابی به minimum distance بالا (یا احتمال خطای پایین):
  - کدهای بلوکی: افزایش n و k
  - کدهای کانولوشنی: افزایش مرتبه‌ی حافظه (m).
- encoder های کدهای کانولوشنی:
  - از نظر نحوه‌ی اتصال: feedforward و feedback
  - از نظر نوع خروجی: systematic و nonsystematic

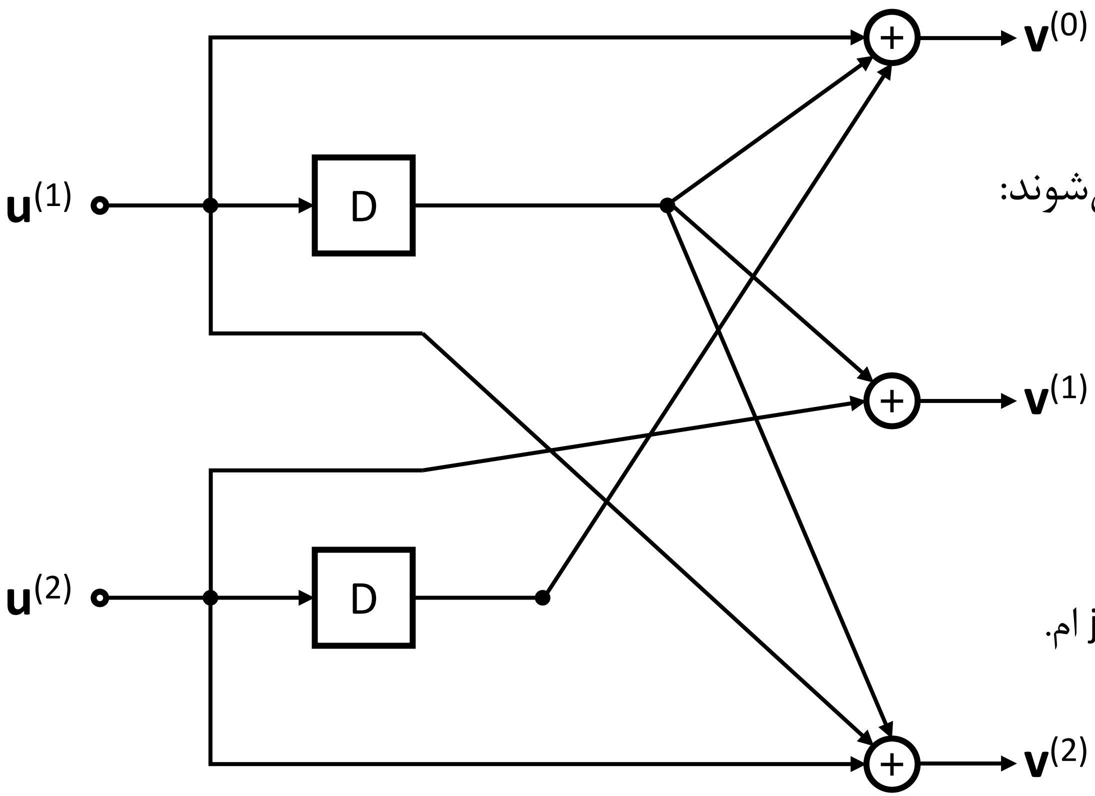
A rate R=1/2 nonsystematic feedforward convolutional encoder



- $k = 1$
- $n = 2$
- $m = 3$
- $\boldsymbol{u} = [u_0\; u_1\; u_2 \;\dots]$
- $\boldsymbol{v}^{(0)} = [v_0^{(0)} v_1^{(0)} v_2^{(0)} \;\dots]$
- $\boldsymbol{v}^{(1)} = [v_0^{(1)} v_1^{(1)} v_2^{(1)} \;\dots]$
- $\boldsymbol{v} = [v_0^{(0)} v_0^{(1)} v_1^{(0)} v_1^{(1)} v_2^{(0)} v_2^{(1)} \;\dots]$
- پاسخ ضربه: $\boldsymbol{u} = [1\;0\;0\;0\;\dots]$
  - $\boldsymbol{g}^{(0)} = \left[g_0^{(0)} g_1^{(0)} g_2^{(0)} \;\dots\right] = [1\;0\;1\;1]$
  - $\boldsymbol{g}^{(1)} = \left[g_0^{(1)} g_1^{(1)} g_2^{(1)} \;\dots\right] = [1\;1\;1\;1]$
- خروجی:
  - $\boldsymbol{v}^{(0)} = \boldsymbol{u} \circledast \boldsymbol{g}^{(0)}$
  - $\boldsymbol{v}^{(1)} = \boldsymbol{u} \circledast \boldsymbol{g}^{(1)}$

- $v_l^{(j)} = \sum_{i=0}^{m} u_{l-i} g_i^{(j)} = u_l g_0^{(j)} + u_{l-1} g_1^{(j)} + \cdots + u_{l-m} g_m^{(j)}$
- بردارهای خروجی:
  - $v_l^{(0)} = u_l + u_{l-2} + u_{l-3}$
  - $v_l^{(1)} = u_l + u_{l-1} + u_{l-2} + u_{l-3}$

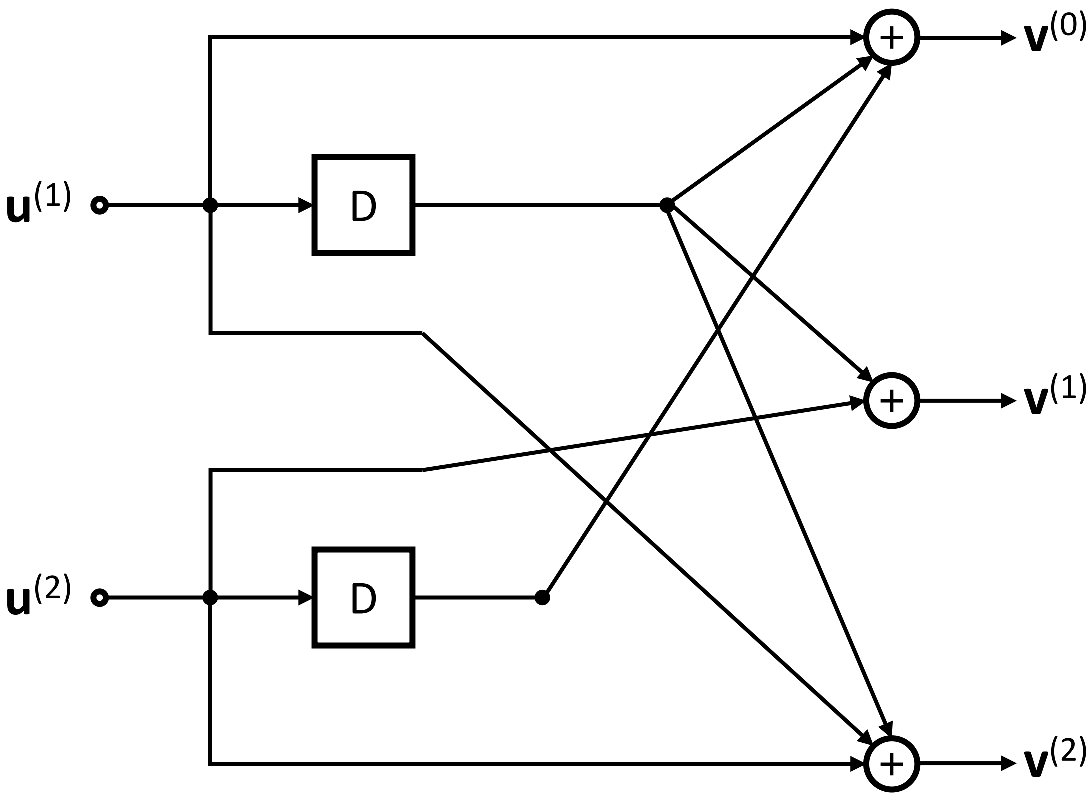
A rate R=2/3 nonsystematic feedforward convolutional encoder



- $k = 2$
- $n = 3$
- $m = 1$
- بیت‌های ورودی، دوتا دوتا وارد encoder می‌شوند:
  - $\boldsymbol{u} = [u_0^{(1)}\ u_0^{(2)}, u_1^{(1)}\ u_1^{(2)}, u_2^{(1)}\ u_2^{(2)}, \dots]$
  - $\boldsymbol{u}^{(1)} = [u_0^{(1)}\ u_1^{(1)}\ u_2^{(1)}\ \dots]$
  - $\boldsymbol{u}^{(2)} = [u_0^{(2)}\ u_1^{(2)}\ u_2^{(2)}\ \dots]$
- دو ورودی و سه خروجی:
  - شش دنباله‌ی مولد داریم.
  - $\boldsymbol{g}_i^{(j)}$: دنباله‌ی مولد از ورودی i ام به خروجی j ام.

$$\boldsymbol{g}_1^{(0)} = [1\ 1] \qquad \boldsymbol{g}_2^{(0)} = [0\ 1]$$
$$\boldsymbol{g}_1^{(1)} = [0\ 1] \qquad \boldsymbol{g}_2^{(1)} = [1\ 0]$$
$$\boldsymbol{g}_1^{(2)} = [1\ 1] \qquad \boldsymbol{g}_2^{(2)} = [1\ 0]$$

A rate R=2/3 nonsystematic feedforward convolutional encoder



➢ مثلاً اگر $\boldsymbol{u} = [11,01,10]$ باشد:

- $\boldsymbol{u}^{(1)} = [101]$
- $\boldsymbol{u}^{(2)} = [110]$

➢ بردارهای خروجی:

- $\boldsymbol{v}^{(0)} = [101] \circledast [11] + [110] \circledast [01]$
- $\boldsymbol{v}^{(1)} = [101] \circledast [01] + [110] \circledast [10]$
- $\boldsymbol{v}^{(2)} = [101] \circledast [11] + [110] \circledast [10]$

➢ یعنی:

- $\boldsymbol{v}^{(0)} = [1001]$
- $\boldsymbol{v}^{(1)} = [1001]$
- $\boldsymbol{v}^{(2)} = [0011]$

➢ $\boldsymbol{v} = [110,000,001,111]$

Definitions

- ν_i : طول i امین شیفت رجیستر در encoder یک کد کانولوشنی ($i = 1,2, \dots k$).
  - در مثال‌های قبل؟

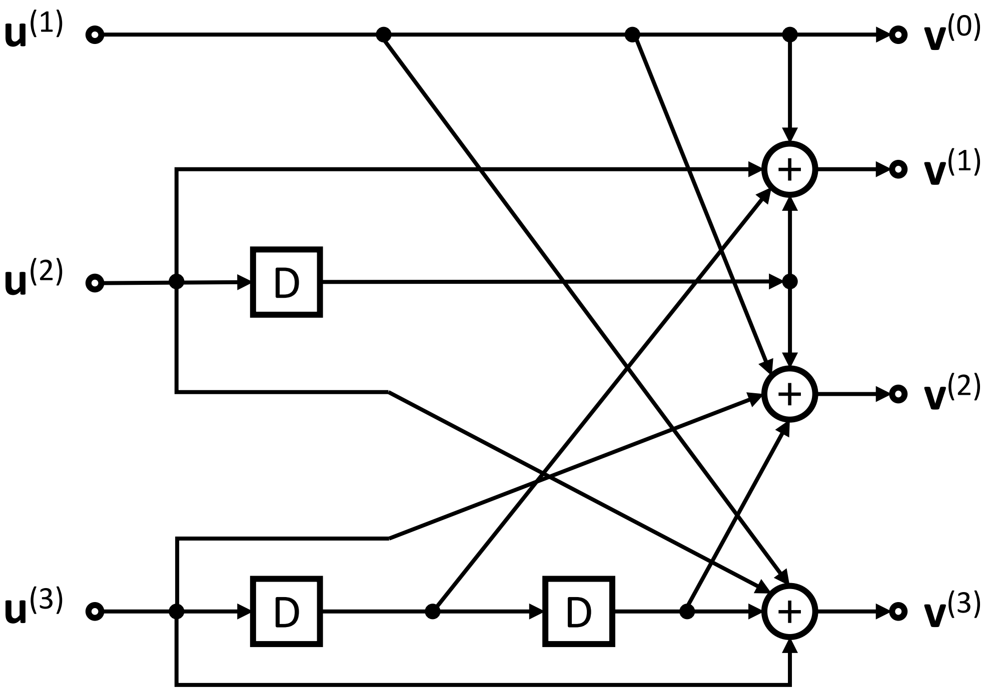
- مرتبه‌ی حافظه (m): حداکثر طول رجیسترها: $m = \max_{1 \le i \le k} \nu_i$
  - در مثال‌های قبل؟

- constraint length (ν): مجموع طول رجیسترها: $\nu = \sum_{i=1}^{k} \nu_i$
  - در مثال‌های قبل؟

- رابطه‌ی ν و m:
  - درحالت خاص $k = 1$: $\nu = m$
  - در حالت کلی: $m \le \nu \le km$

- به یک کد کانولوشنی با نرخ $R = \frac{k}{n}$ و با constraint length برابر ν معمولاً یک (n,k,v) convolutional code می‌گوییم.

A (4,3,3) nonsystematic feedforward encoder

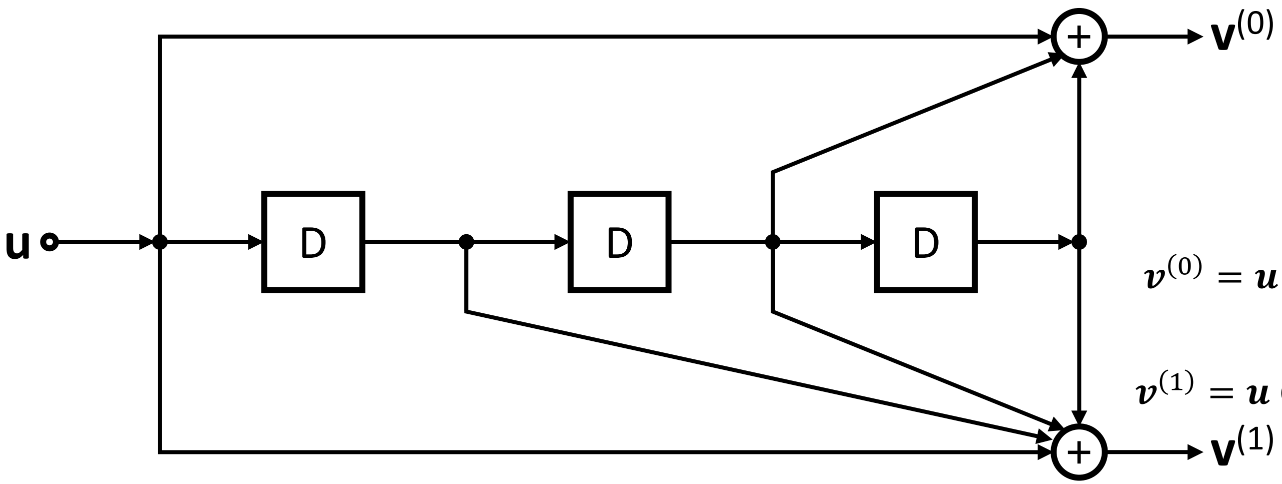


$$\boldsymbol{g}_1^{(0)} = [100] \quad \boldsymbol{g}_2^{(0)} = [000] \quad \boldsymbol{g}_3^{(0)} = [000]$$
$$\boldsymbol{g}_1^{(1)} = [100] \quad \boldsymbol{g}_2^{(1)} = [110] \quad \boldsymbol{g}_3^{(1)} = [010]$$
$$\boldsymbol{g}_1^{(2)} = [100] \quad \boldsymbol{g}_2^{(2)} = [010] \quad \boldsymbol{g}_3^{(2)} = [101]$$
$$\boldsymbol{g}_1^{(3)} = [100] \quad \boldsymbol{g}_2^{(3)} = [100] \quad \boldsymbol{g}_3^{(3)} = [101]$$

Frequency domain representation

- تأخیر = D
- $\boldsymbol{u} = [u_0\ u_1\ u_2 \ldots] \Rightarrow \boldsymbol{u}(D) = u_0 + u_1 D + u_2 D^2 + \cdots$
- مثلاً برای یک کد (2,1,v):
  - $\boldsymbol{g}^{(0)}(D) = g_0^{(0)} + g_1^{(0)} D + \cdots + g_m^{(0)} D^m$
  - $\boldsymbol{g}^{(1)}(D) = g_0^{(1)} + g_1^{(1)} D + \cdots + g_m^{(1)} D^m$
  - $\boldsymbol{v}^{(0)}(D) = \boldsymbol{u}(D)\boldsymbol{g}^{(0)}(D) = v_0^{(0)} + v_1^{(0)} D + v_2^{(0)} D^2 + \cdots$
  - $\boldsymbol{v}^{(1)}(D) = \boldsymbol{u}(D)\boldsymbol{g}^{(1)}(D) = v_0^{(1)} + v_1^{(1)} D + v_2^{(1)} D^2 + \cdots$
  - $\boldsymbol{V}(D) = [\boldsymbol{v}^{(0)}(D)\ \ \boldsymbol{v}^{(1)}(D)]$
  - $\boldsymbol{v} = [v_0^{(0)} v_0^{(1)}, v_1^{(0)} v_1^{(1)}, v_2^{(0)} v_2^{(1)}, \ldots]$
  - $\boldsymbol{v}(D) = v_0^{(0)} + D v_0^{(1)} + D^2 v_1^{(0)} + D^3 v_1^{(1)} + D^4 v_2^{(0)} + D^5 v_2^{(0)} + \cdots$
  - $\boldsymbol{v}(D) = v_0^{(0)} + D^2 v_1^{(0)} + D^4 v_2^{(0)} + \cdots + D\left(v_0^{(0)} + D^2 v_1^{(0)} + D^4 v_2^{(0)} + \cdots\right)$
  - $\boldsymbol{v}(D) = \boldsymbol{v}^{(0)}(D^2) + D\boldsymbol{v}^{(1)}(D^2)$

A (2,1,3) nonsystematic feedforward convolutional encoder – continued



- $k = 1$ و $n = 2$
- حوزه‌ی زمان:
  - $\boldsymbol{u} = [1\ 0\ 1\ 1\ 1]$
  - $\boldsymbol{g}^{(0)} = [1\ 0\ 1\ 1]$
  - $\boldsymbol{g}^{(1)} = [1\ 1\ 1\ 1\ ]$
  - $\boldsymbol{v}^{(0)} = \boldsymbol{u} \circledast \boldsymbol{g}^{(0)} = [1\ 0\ 1\ 1\ 1] \circledast [1\ 0\ 1\ 1]$
  - $\boldsymbol{v}^{(0)} = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1]$
  - $\boldsymbol{v}^{(1)} = \boldsymbol{u} \circledast \boldsymbol{g}^{(1)} = [1\ 0\ 1\ 1\ 1\ ] \circledast [1\ 1\ 1\ 1]$
  - $\boldsymbol{v}^{(1)} = [1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1]$
  - $\boldsymbol{v} = [11\ 01\ 00\ 01\ 01\ 01\ 00\ 11]$
- حوزه‌ی فرکانس:
  - $\boldsymbol{u}(D) = 1 + D^2 + D^3 + D^4$
  - $\boldsymbol{g}^{(0)}(D) = 1 + D^2 + D^3$
  - $\boldsymbol{g}^{(1)}(D) = 1 + D + D^2 + D^3$
  - $\boldsymbol{v}^{(0)}(D) = \boldsymbol{u}(D)\boldsymbol{g}^{(0)}(D) = (1 + D^2 + D^3 + D^4)(1 + D^2 + D^3) = 1 + D^7$
  - $\boldsymbol{v}^{(0)}(D) = \boldsymbol{u}(D)\boldsymbol{g}^{(0)}(D) = (1 + D^2 + D^3 + D^4)(1 + D^2 + D^3) = 1 + D + D^3 + D^4 + D^5 + D^7$
  - $\boldsymbol{v}(D) = \boldsymbol{v}^{(0)}(D^2) + D\boldsymbol{v}^{(1)}(D^2) = (1 + D^{14}) + D(1 + D^2 + D^6 + D^8 + D^{10} + D^{14})$
  - $\boldsymbol{v}(D) = 1 + D + D^3 + D^7 + D^9 + D^{11} + D^{14} + D^{15}$

Transfer domain generator matrix

➢ در حالت کلی:

- $\boldsymbol{u}^{(i)}(D)$ دنباله‌ی ورودی i ام است.
- $\boldsymbol{v}^{(j)}(D)$ دنباله‌ی خروجی j ام است.
- $\boldsymbol{g}_i^{(j)}(D)$ تابع تبدیل (در حوزه‌ی تبدیل) از ورودی i ام به خروجی j ام ست.

➢ ماتریس generator در حوزه‌ی تبدیل است:

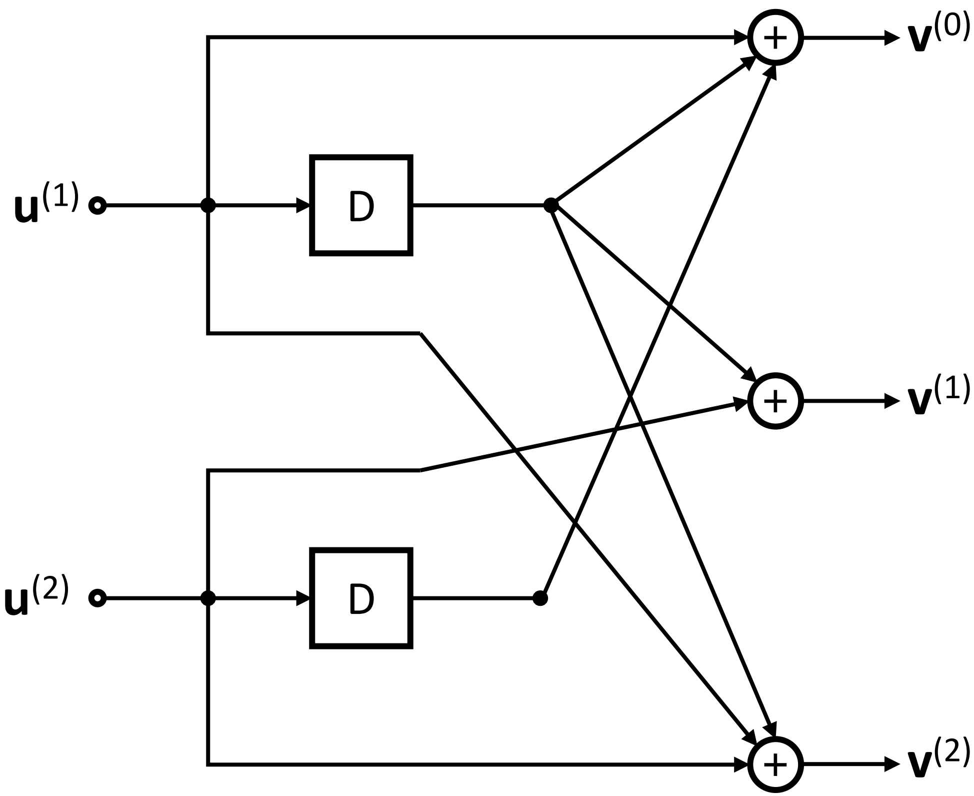
$$\boldsymbol{G}(D) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1^{(0)}(D) & \boldsymbol{g}_1^{(1)}(D) & \dots & \boldsymbol{g}_1^{(n-1)}(D) \\ \boldsymbol{g}_2^{(0)}(D) & \boldsymbol{g}_2^{(1)}(D) & \dots & \boldsymbol{g}_2^{(n-1)}(D) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{g}_k^{(0)}(D) & \boldsymbol{g}_k^{(1)}(D) & \dots & \boldsymbol{g}_k^{(n-1)}(D) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{V}(D) = \boldsymbol{U}(D)\boldsymbol{G}(D)$$

➢ که در آن:

- $\boldsymbol{U}(D) \triangleq [\boldsymbol{u}^{(1)}(D), \boldsymbol{u}^{(2)}(D), \dots, \boldsymbol{u}^{(k)}(D)]$
- $\boldsymbol{V}(D) \triangleq [\boldsymbol{v}^{(0)}(D), \boldsymbol{v}^{(1)}(D), \dots, \boldsymbol{v}^{(n-1)}(D)]$

➢ در نهایت: $\boldsymbol{v}(D) = \boldsymbol{v}^{(0)}(D^n) + D\boldsymbol{v}^{(1)}(D^n) + \cdots + D^{n-1}\boldsymbol{v}^{(n-1)}(D^n)$

A rate R=2/3 nonsystematic feedforward encoder – continued



- $\boldsymbol{g}_i^{(j)}$: دنباله‌ی مولد از ورودی i ام به خروجی j ام.

$$\boldsymbol{g}_1^{(0)} = [1\ 1] \qquad \boldsymbol{g}_2^{(0)} = [0\ 1]$$
$$\boldsymbol{g}_1^{(1)} = [0\ 1] \qquad \boldsymbol{g}_2^{(1)} = [1\ 0]$$
$$\boldsymbol{g}_1^{(2)} = [1\ 1] \qquad \boldsymbol{g}_2^{(2)} = [1\ 0]$$

- ماتریس مولد در حوزه‌ی تبدیل:

$$\boldsymbol{G}(D) = \begin{bmatrix} 1+D & D & 1+D \\ D & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- ورودی‌ها: $\boldsymbol{u} = [11,01,10]$
  - $\boldsymbol{u}^{(1)}(D) = 1 + D^2$
  - $\boldsymbol{u}^{(2)}(D) = 1 + D$

- خروجی:

$$\boldsymbol{V}(D) = \left[\boldsymbol{v}^{(0)}(D), \boldsymbol{v}^{(1)}(D), \boldsymbol{v}^{(2)}(D)\right] = [1+D^2 \quad 1+D] \begin{bmatrix} 1+D & D & 1+D \\ D & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= [1+D^3 \quad 1+D^3 \quad D^2+D^3]$$

$$\boldsymbol{v}(D) = [1 + D + D^8 + D9 + D^{10} + D^{11}] \Rightarrow \boldsymbol{v} = [1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ ]$$

Systematic convolutional encoders

- k دنباله‌ی اول خروجی، همان ورودی‌ها هستند: $\boldsymbol{v}^{(i-1)} = \boldsymbol{u}^{(i)}, \quad i = 1,2,\ldots,k$
- دنباله‌های مولد:

$$\boldsymbol{g}_i^{(j)} = \begin{cases} [1\ 0\ 0 \cdots 0] & j = i-1 \\ [0\ 0\ 0 \cdots 0] & j \neq i-1 \end{cases} \qquad j = 0, 2, \ldots, k-1$$

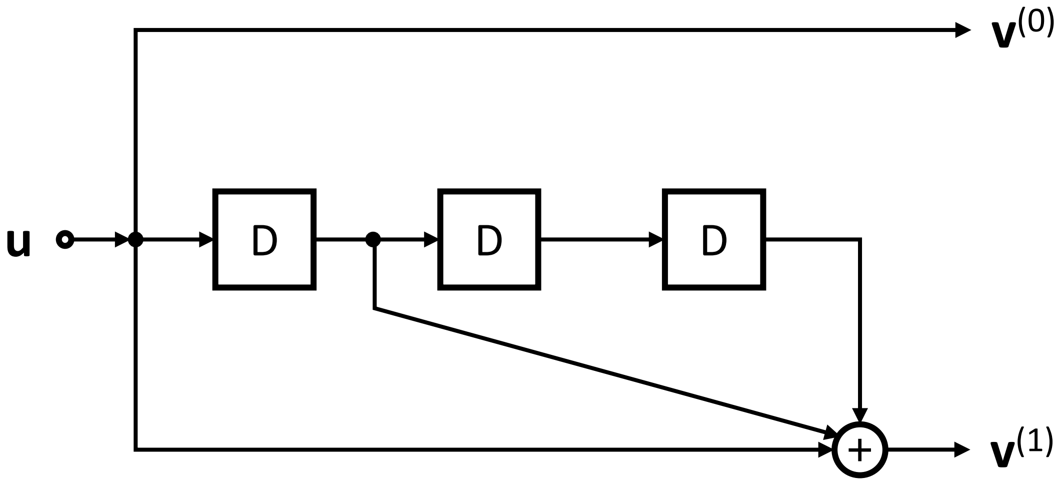
- چندجمله‌ای‌های مولد:

$$\boldsymbol{g}_i^{(j)}(D) = \begin{cases} 1 & j = i-1 \\ 0 & j \neq i-1 \end{cases} \qquad j = 0, 2, \ldots, k-1$$

- ماتریس مولد در حوزه‌ی تبدیل:

$$\boldsymbol{G}(D) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{g}_1^{(k)}(D) & \cdots & \boldsymbol{g}_1^{(n-1)}(D) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \boldsymbol{g}_2^{(k)}(D) & \cdots & \boldsymbol{g}_2^{(n-1)}(D) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \boldsymbol{g}_k^{(k)}(D) & \cdots & \boldsymbol{g}_k^{(n-1)}(D) \end{bmatrix}$$

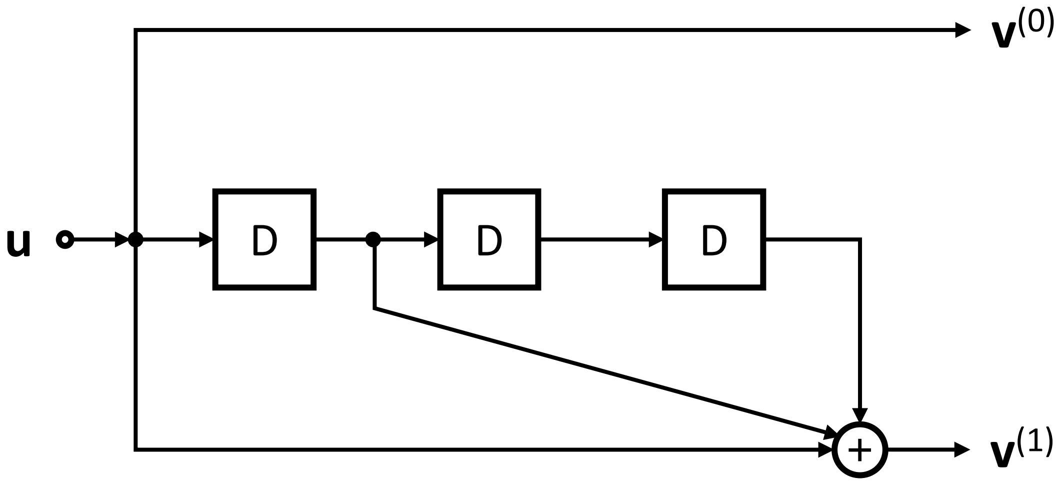
A rate R=1/2 systematic feedforward convolutional encoder



$$g^{(0)} = [1\ 0\ 0\ 0]$$
$$g^{(1)} = [1\ 1\ 0\ 1]$$
$$G(D) = [1 \quad 1 + D + D^3]$$

➢ مثلاً اگر ورودی: $u = [1\ 0\ 1\ 1]$

A rate R=1/2 systematic feedforward convolutional encoder



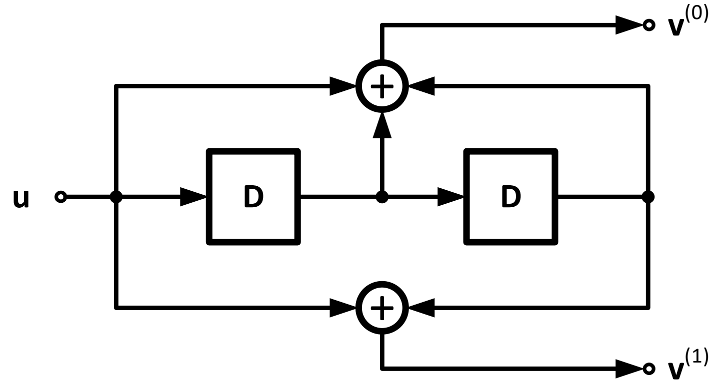
$$\boldsymbol{g}^{(0)} = [1\ 0\ 0\ 0]$$
$$\boldsymbol{g}^{(1)} = [1\ 1\ 0\ 1]$$
$$\boldsymbol{G}(D) = [1 \quad 1 + D + D^3]$$

➢ مثلاً اگر ورودی: $\boldsymbol{u} = [1\ 0\ 1\ 1]$

- $\boldsymbol{u}(D) = 1 + D^2 + D^3$
- $\boldsymbol{v}^{(0)}(D) = \boldsymbol{u}(D)\boldsymbol{g}^{(0)}(D) = 1 + D^2 + D^3$
- $\boldsymbol{v}^{(1)}(D) = \boldsymbol{u}(D)\boldsymbol{g}^{(1)}(D) = (1 + D^2 + D^3)(1 + D + D^3) = 1 + D + D^2 + D^3 + D^4 + D^5 + D^6$
- $\boldsymbol{V}(D) = \boldsymbol{U}(D)\boldsymbol{G}(D) = [1 + D^2 + D^3 \quad 1 + D + D^2 + D^3 + D^4 + D^5 + D^6]$
- $\boldsymbol{v}(D) = \boldsymbol{v}^{(0)}(D^2) + D\boldsymbol{v}^{(1)}(D^2) = 1 + D + D^3 + D^4 + D^5 + D^6 + D^7 + D^9 + D^{11} + D^{13}$
- $\boldsymbol{v} = [11,01,11,11,01,01,01]$

State diagram

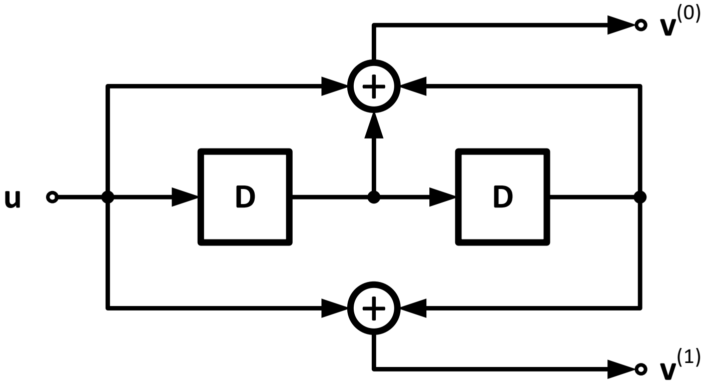
A rate R=1/2 Convolutional encoder

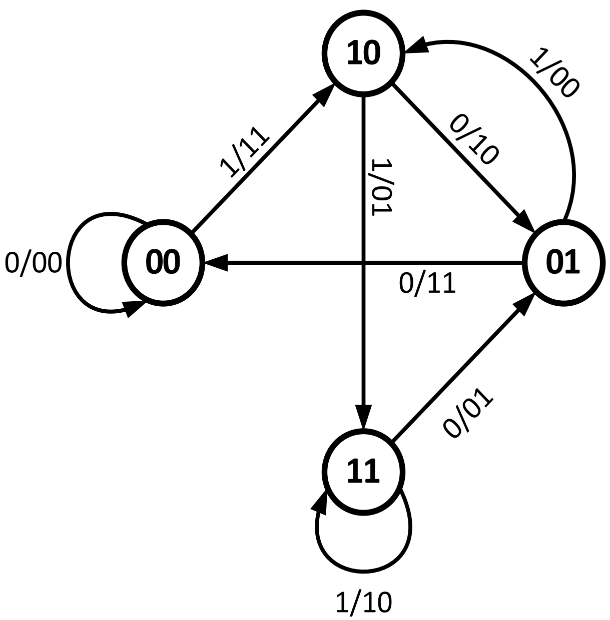


- به هریک از حالات ممکن فلیپ فلاپ‌ها یک حالت (وضعیت) اختصاص می‌دهیم ⇐ دیاگرم حالت.
- تعداد حالات ممکن $= 2^{\nu}$
- در دیاگرام حالت مشخص می‌کنیم که در هر یک از حالات به ازای هریک از ورودی‌های ممکن خروجی چه خواهد بود و حالت بعدی مدار کدام حالت خواهد بود.

- مثلاً برای این مدار:
  - n, k, v ؟
  - دو فلیپ فلاپ ⇐ چهار حالت.
  - 00 و 01 و 10 و 11

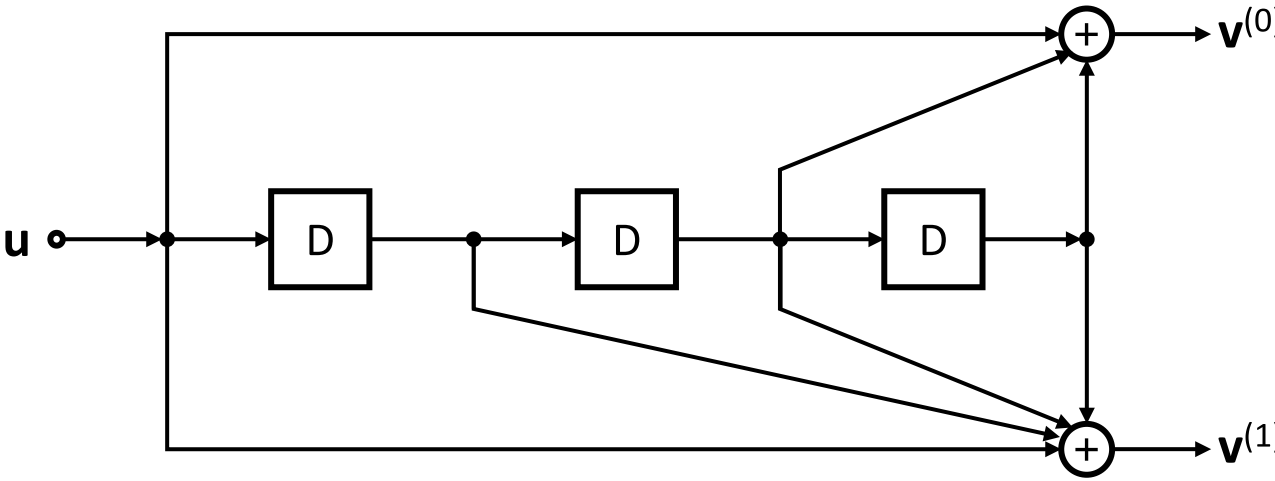
A rate R=1/2 Convolutional encoder





- مدار در حالت صفر (00):
  - ورودی «0»:
    - در حالت «00» باقی می‌مانیم.
    - خروجی «00» خواهد بود.
  - ورودی «1»:
    - حالت بعد: «10»،
    - خروجی: «11».
- مدار در حالت (10):
  - ورودی «0»: حالت بعد: 01، خروجی 10
  - ورودی «1»: حالت بعد: 11، خروجی 01
- مدار در حالت (01):
  - ورودی «0»: حالت بعد: 00، خروجی 11
  - ورودی «1»: حالت بعد: 10، خروجی 00
- مدار در حالت (11):
  - ؟

A rate R=1/2 nonsystematic feedforward convolutional encoder

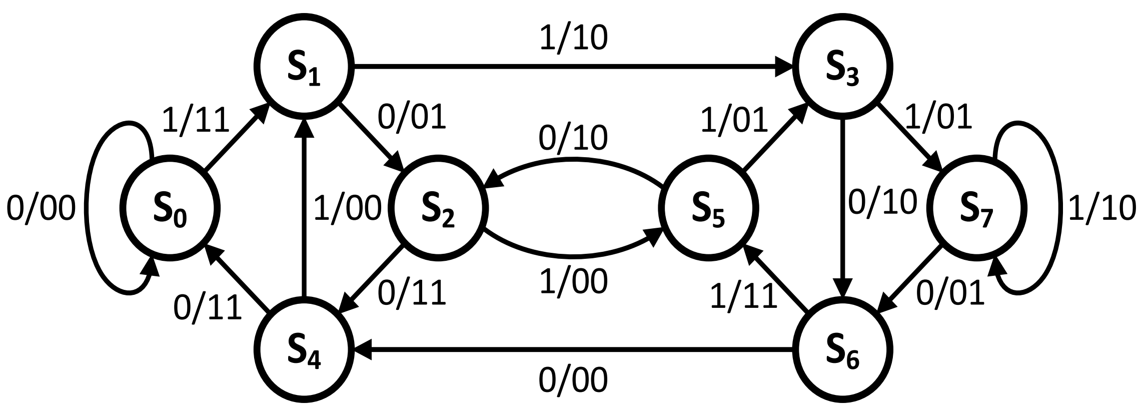


➢ حالات:

- S0: 000
- S1: 100
- S2: 010
- S3: 110
- S4: 001
- S5: 101
- S6: 011
- S7: 111

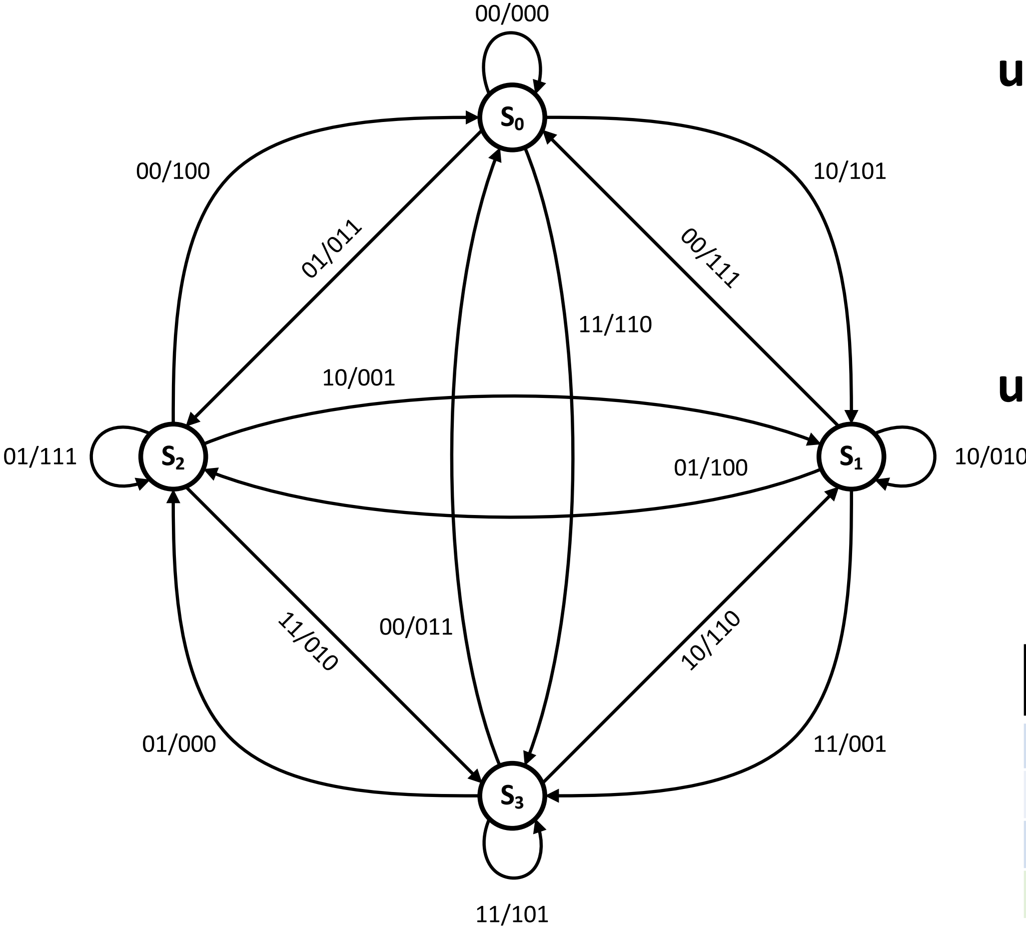
➢ ورودی: [10111]

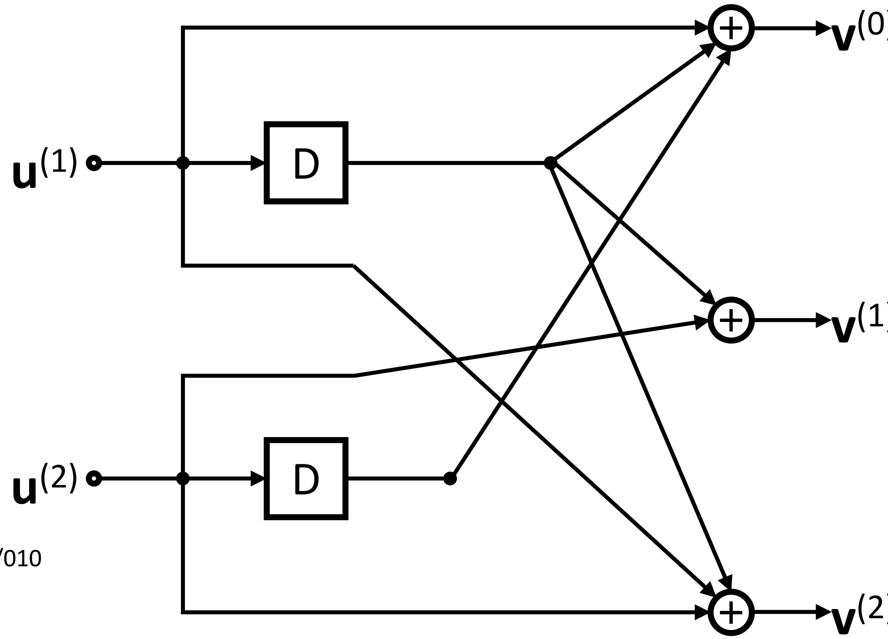
حالت اولیه	ورودی	حالت بعدی	خروجی
S0	1	S1	11
S1	0	S2	01
S2	1	S5	00
S5	1	S3	01
S3	1	S7	01
S7	0	S6	01
S6	0	S4	00
S4	0	S0	11



State diagram

A rate R=2/3 nonsystematic feedforward convolutional encoder





➢ ورودی: [110110]

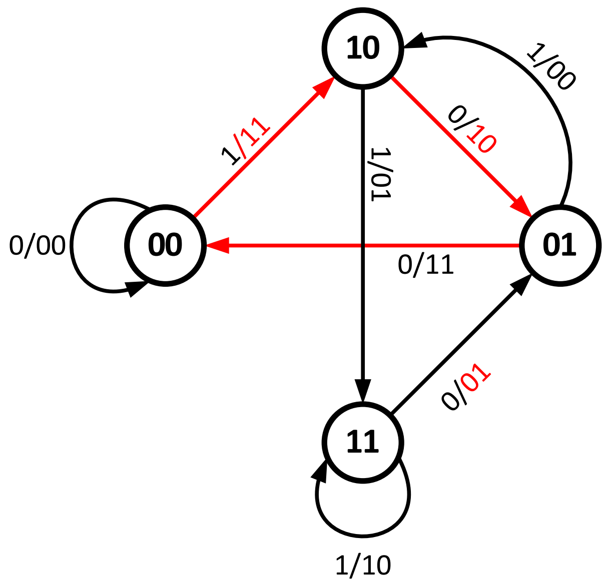
حالت اولیه	ورودی	حالت بعدی	خروجی
S0	11	S3	110
S3	01	S2	000
S2	10	S1	001
S1	00	S0	111

Minimum free distance

➢ تعریف:

$$d_{free} = \min_{\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}''}\{w(\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}''): \boldsymbol{u}' \neq \boldsymbol{u}''\}$$
$$= \min_{\boldsymbol{u}}\{w(\boldsymbol{v}): \boldsymbol{u} \neq 0\}$$

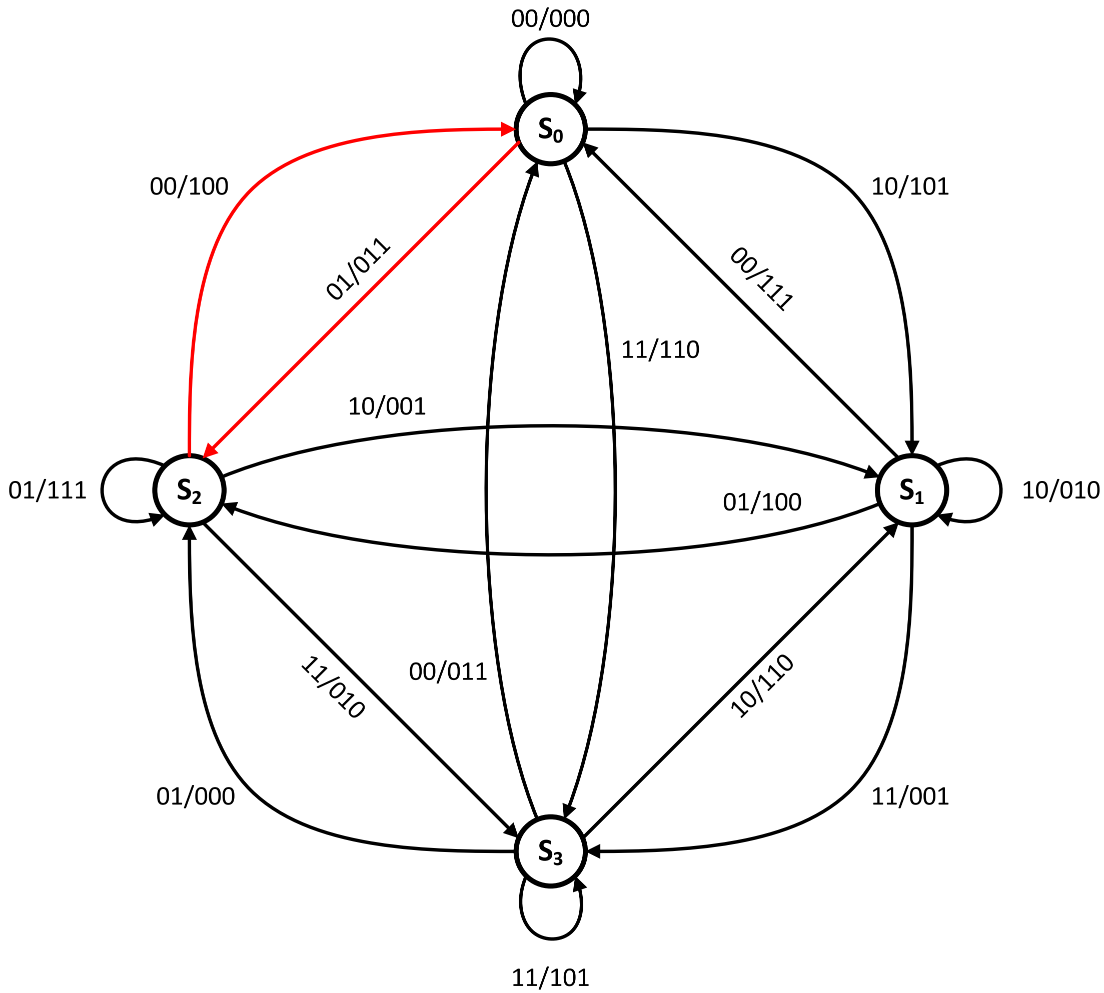
➢ از حالت صفر شروع می‌کنیم و از هر مسیری به جز حلقه‌ی با وزن صفر به حالت صفر برمی‌گردیم، کمترین وزن به دست آمده، minimum free distance است.



$$d_{free} = 5$$

Minimum free distance of a (3,2,2) convolutional code

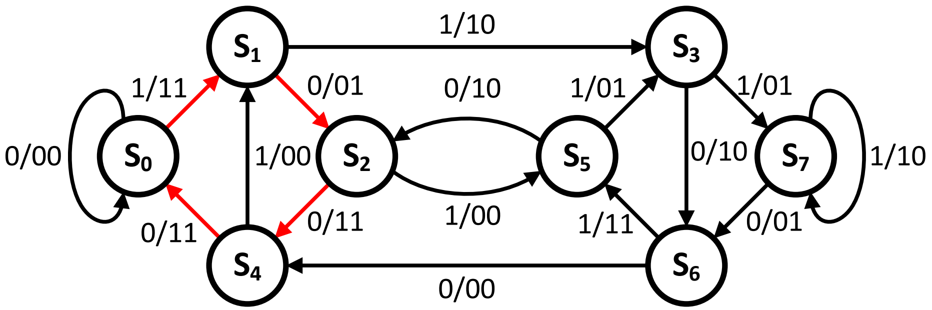
$d_{free} = 3$



State diagram

Minimum free distance of a (2,1,3) convolutional code

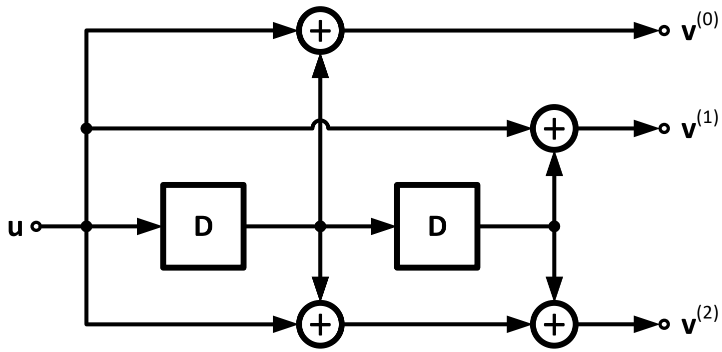
$d_{free} = 7$



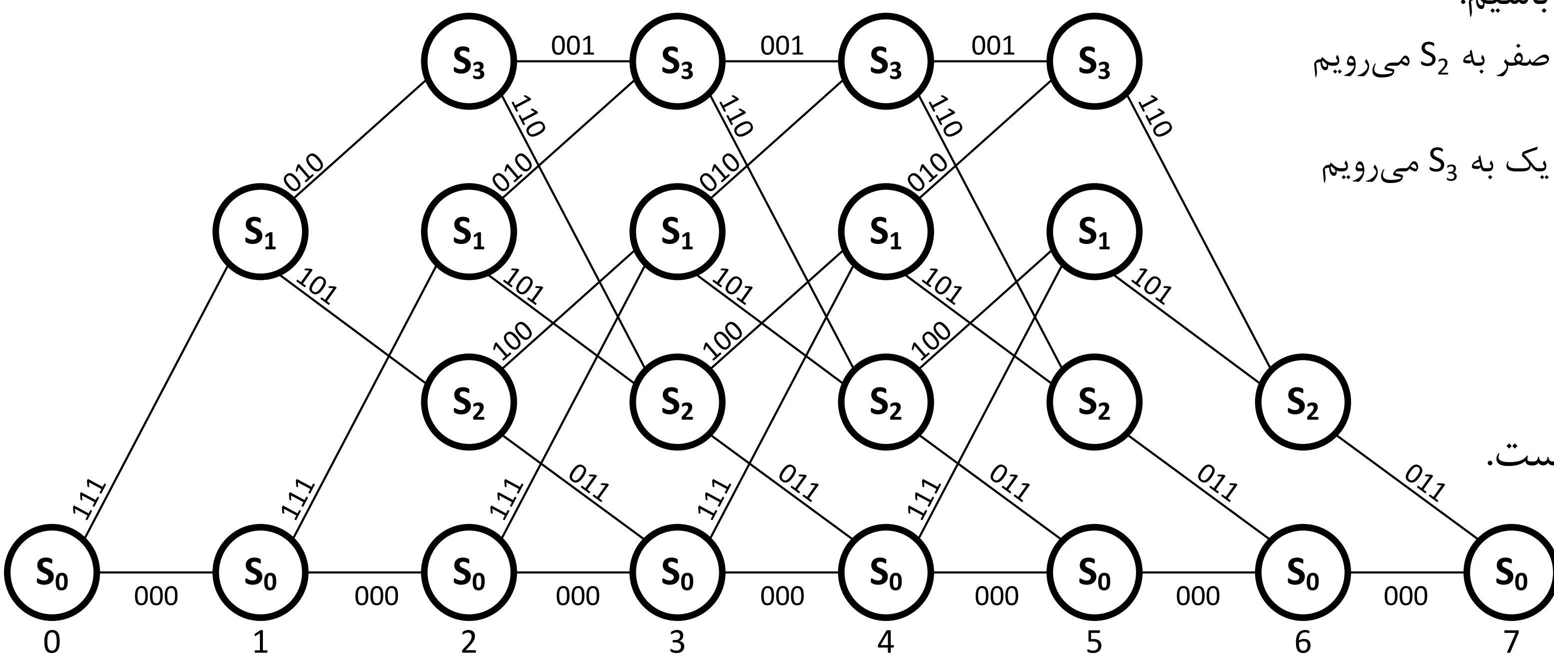
Trellis representation of convolutional codes

- همان دیاگرام حالت است که در زمان‌های مختلف ترسیم شده است.
- حالت تمام در پایین ترین سطح و حالت تمام یک در بالاترین سطح قرار می‌گیرد.
- به هر حالت 2^k شاخه وارد می‌شود و از هر حالت 2^k شاخه خارج می‌شود.
- همیشه شاخه‌ی بالایی به ازای ورودی یک و شاخه‌ی پایینی به ازای ورودی صفر است.
- روی هر شاخه خروجی مرتبط نوشته می‌شود.
- دیاگرام از حالت صفر شروع می‌شود و به حالت صفر هم ختم می‌شود.
- اگر طول دنباله‌ی اطلاعات h باشد، تعداد کل لحظات برابر است با h+m+1 (از 0 تا h+m).
- تعداد m لحظه‌ی اول و آخر تمام حالت‌ها را ندارند.

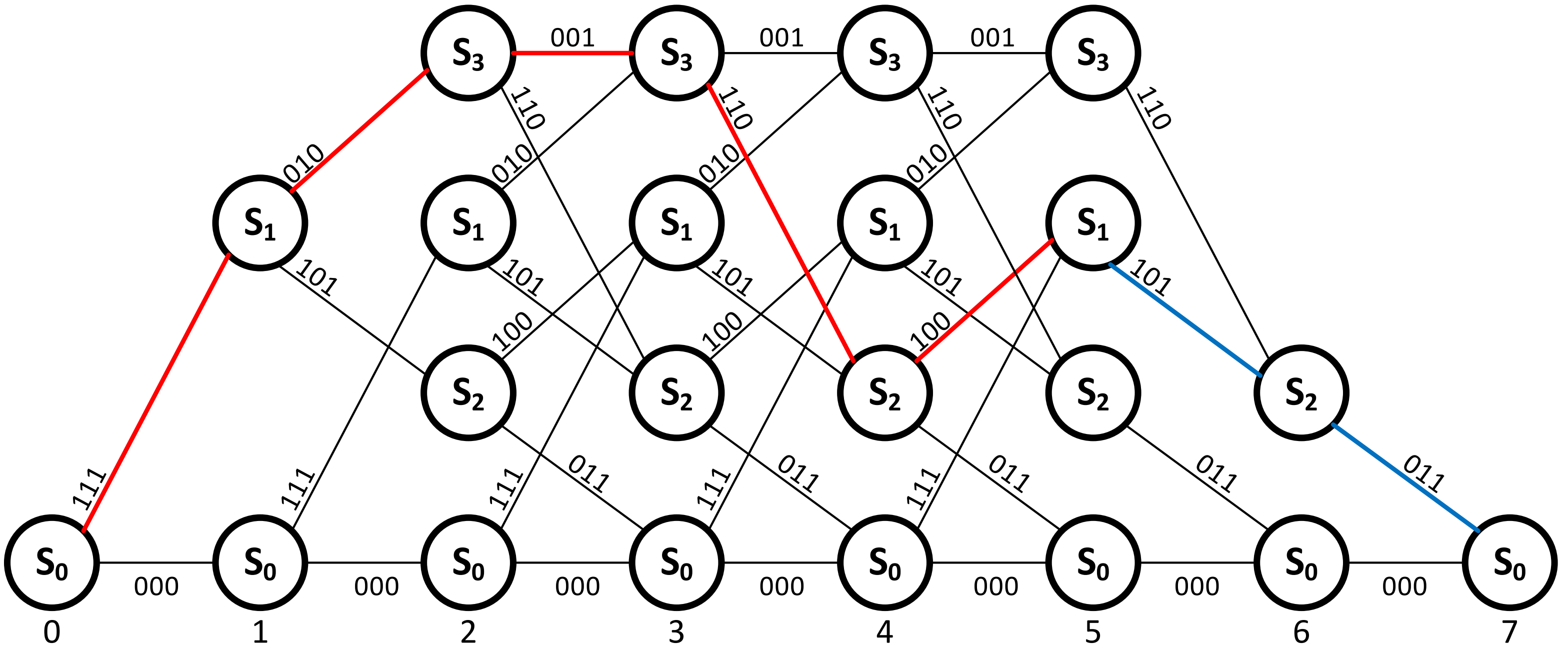
Trellis representation of a (3,1,2) convolutional encoder



- از حالت صفر شروع می‌کنیم:
  - به ازای ورودی صفر، در همین حالت باقی می‌مانیم و خروجی 000 است.
  - به ازای ورودی یک، به حالت S_1 می‌رویم و خروجی 111 است.
- در لحظه‌ی یک:
  - اگر در حالت صفر باشیم، مانند حالت قبل.
  - اگر در حالت یک باشیم:
    - به ازای ورودی صفر به S_2 می‌رویم (خروجی 101)
    - به ازای ورودی یک به S_3 می‌رویم (خروجی 010)
- در لحظه‌ی دو:
- به همین ترتیب:
- حالت نهایی صفر است.



Trellis representation of a (3,1,2) convolutional encoder



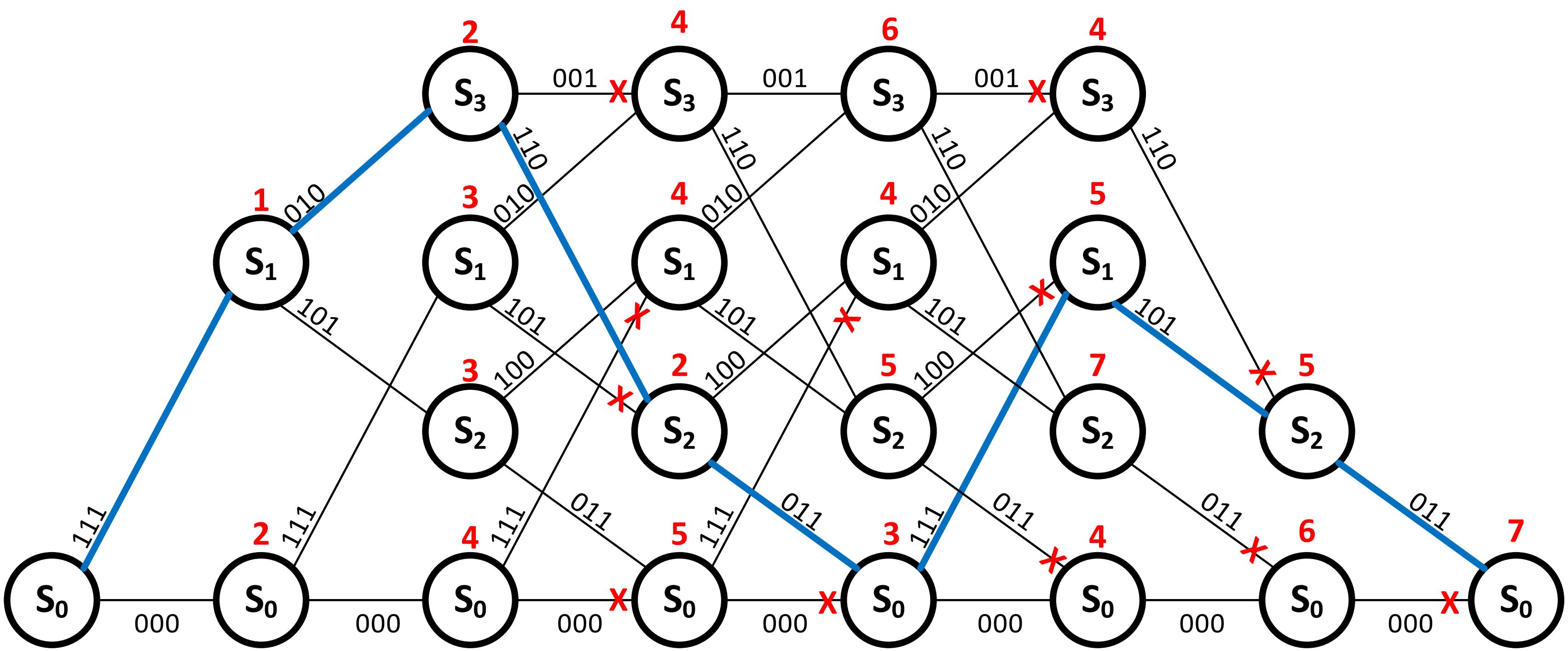
➢اگر ورودی برابر باشد با [11101] (یعنی طول ورودی $h = 5$):

- تعداد کل لحظات: $h + m + 1 = 5 + 2 + 1 = 8$
- لحظات 0 و 1 و نیز لحظات 6 و 7 شامل تمام حالات نیستند.
- خطوط بالارونده به ازای ورودی یک و خطوط پایین رونده به ازای ورودی صفر هستند.
- باید به حالت صفر برگردیم.

Decoding of convolutional encoders: Viterbi Algorithm

- متریک شاخه: اختلاف خروجی دریافتی با خروجی شاخه.
- متریک مسیر: جمع متریک کل شاخه‌های مسیر.
- متریک گره: کمترین متریک از بین کل مسیرهای جزئی منتهی به گره.
- مسیر برنده: مسیر با کمترین متریک بین حالت صفر در لحظه‌ی اول و آخر.
- روش کار:
  - در هر لحظه متریک تمام شاخه‌های منتهی به هر گره را محاسبه می‌کنیم.
  - متریک هر مسیر برابر است با متریک گره‌ای که از لحظه‌ی قبل به این گره وصل شده به اضافه‌ی متریک شاخه‌ی متصل کننده‌ی این دو.
  - برای هر حالت، مسیر با متریک جزئی کمتر انتخاب شده و سایر مسیرها حذف می‌شوند.

Decoding of a (3,1,2) convolutional code



r = [110 110 110 111 010 101 101]

v̂ = [111 010 110 011 111 101 011]

$$\boldsymbol{u} = [11001]$$