Chapter 4:

Convolutional Codes (continued)

Hamid Meghdadi

Semnan University

hamid.meghdadi@gmail.com

Representing convolutional encoders in Matlab using polynomials

برای encoder های feedforward:

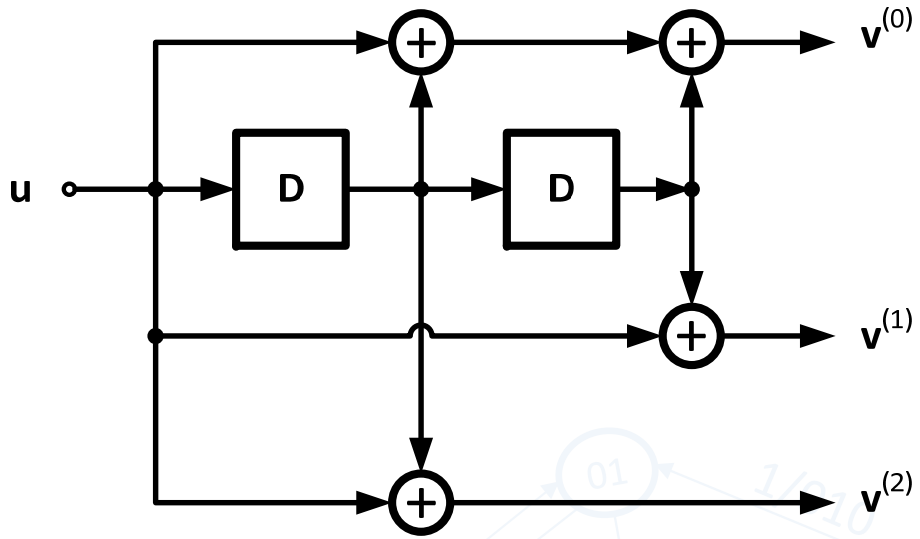
```
trellis = poly2trellis(ConstraintLength,CodeGenerator)
```

بردار v_i ها
(تمام مقادیر $+1$)

ماتریس چندجمله‌ای‌های مولد
به صورت اعداد مبنای 8

- `ConstraintLength` یک بردار $1 \times k$ است.
- `CodeGenerator` یک ماتریس $k \times n$ است

Example 1:



$n = 3, k = 1, \nu_1 = \nu = M = 2$

چندجمله‌ای‌های مولد:

$$\boldsymbol{G}(D) = [1 + D + D^2 \quad 1 + D^2 \quad 1 + D]$$

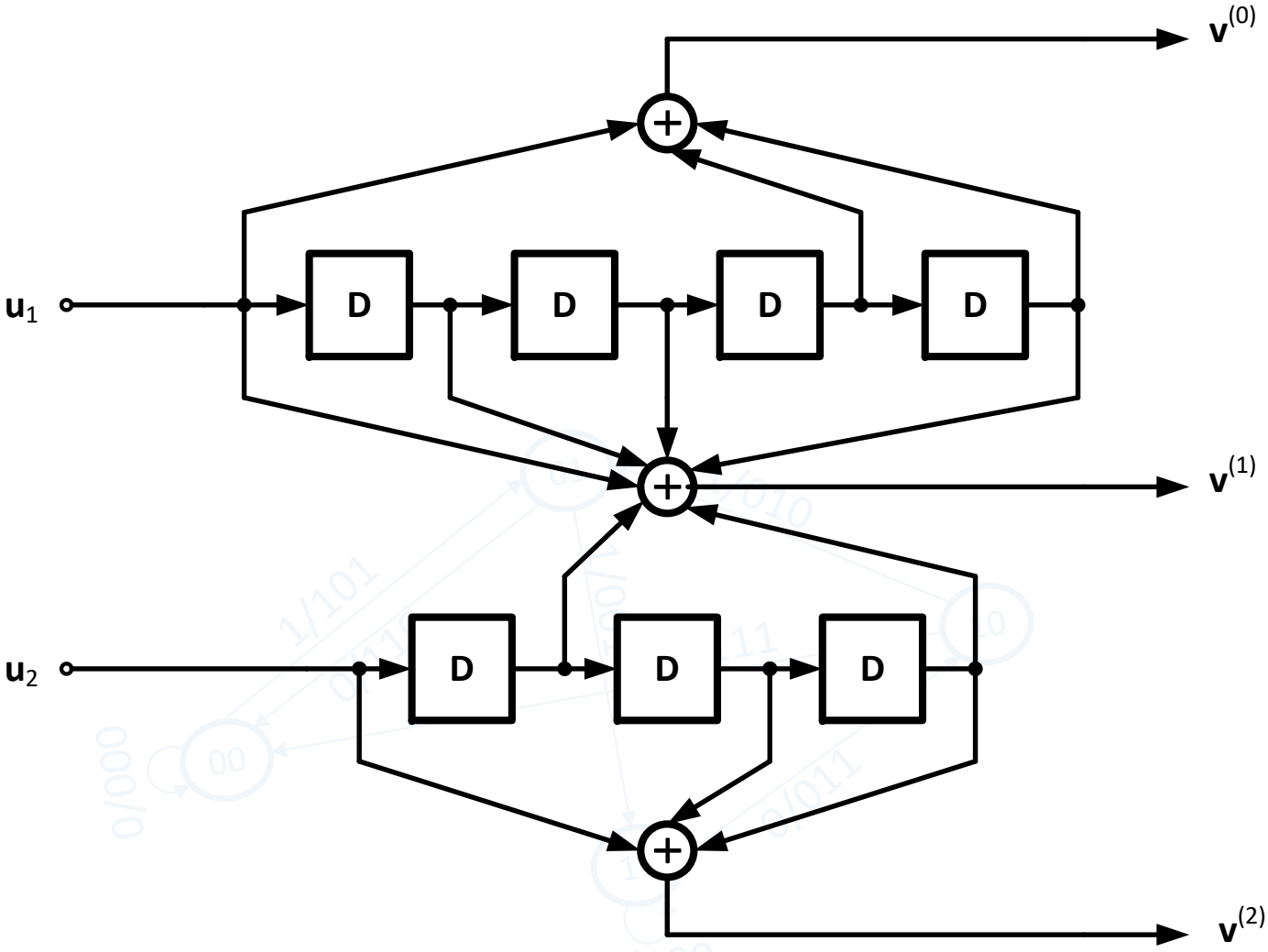
دستور Matlab:

1 1 1 1 0 1 1 1 0

```
trellis = poly2trellis(3,[7 5 6])
```

Example 2:

دستور Matlab:




```
tr2= poly2trellis([5 4],[23 35 0; 0 5 13])
```

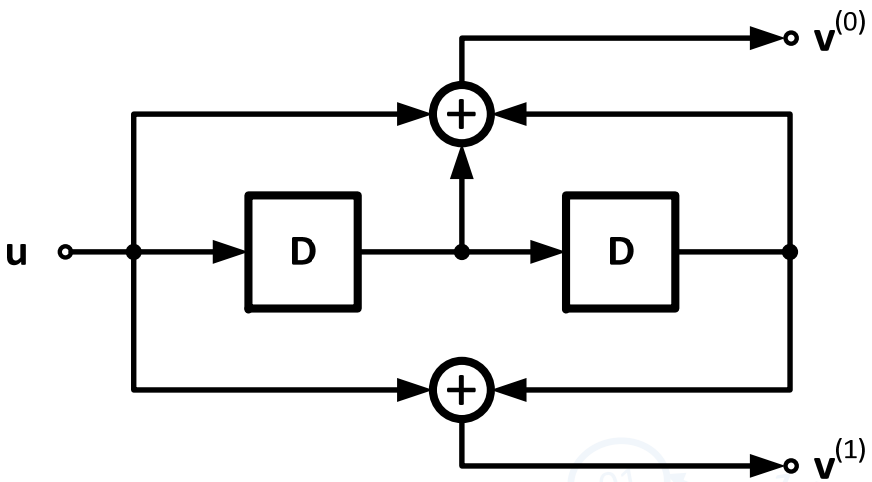
Trellis representation of convolutional encoders in Matlab

➢ تمام اطلاعات یک convolutional encoder در ساختار trellis آن موجود است:

فیلدهای ساختار trellis	ابعاد	معنی
`numInputSymbols`	اسکالر	تعداد کل سمبل‌های ورودی (2^k)
`numOutputSymbols`	اسکالر	تعداد کل سمبل‌های خروجی (2^n)
`numStates`	اسکالر	تعداد حالات encoder (2^v)
`nextStates`	ماتریس با ابعاد $2^v \times 2^k$	نشان دهنده‌ی حالت بعدی سیستم به ازای حالت فعلی و ورودی‌ها است: • هر سطر یک حالت فعلی • هر ستون یک سمبل ورودی • مقدار هر درایه: حالت بعدی
`outputs`	ماتریس با ابعاد $2^v \times 2^k$	نشان دهنده‌ی خروجی سیستم به ازای حالت فعلی و ورودی‌ها است: • هر سطر یک حالت فعلی • هر ستون یک سمبل ورودی • مقدار هر درایه: خروجی

Example 4

دستور Matlab برای نمایش بر حسب چندجمله‌ای:




```
>> tr4=poly2trellis(3,[7 5])

tr4 =

     numInputSymbols: 2
    numOutputSymbols: 4
           numStates: 4
          nextStates: [4x2 double]
             outputs: [4x2 double]
```

تعداد کل سمبل‌های ورودی (2^k)

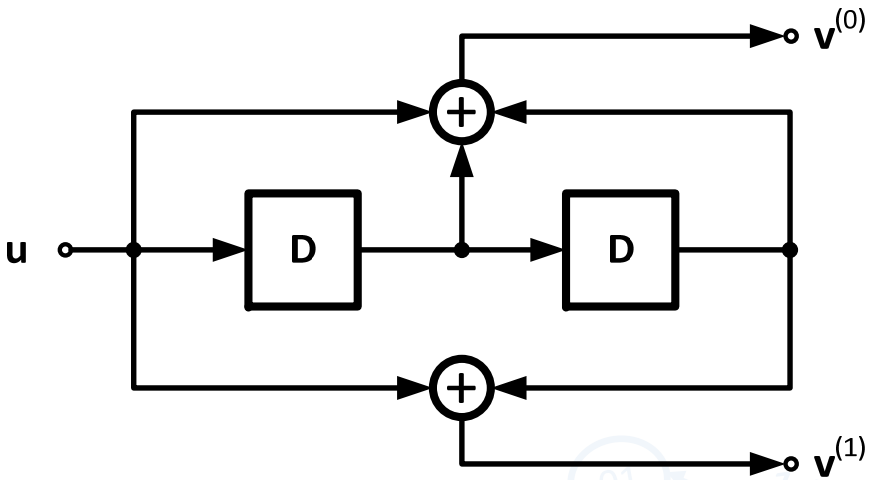
تعداد کل سمبل‌های خروجی (2^n)

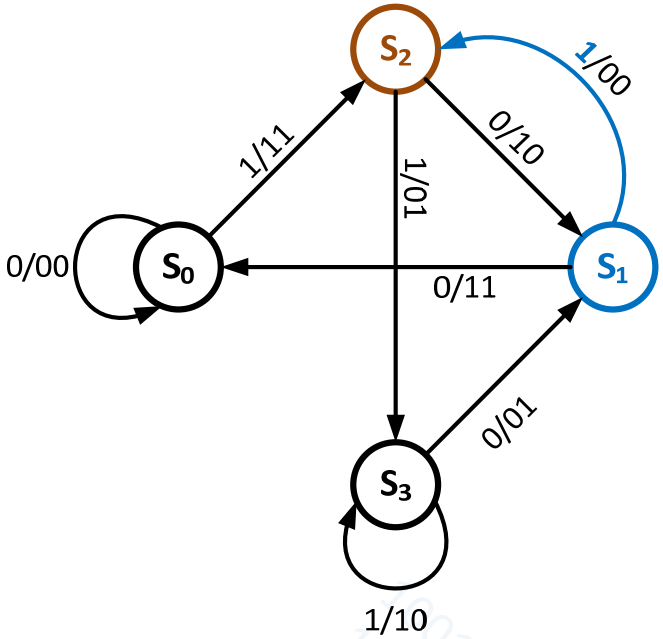
تعداد حالات encoder (2^v)

حالت بعدی سیستم

خروجی سیستم

Example 4





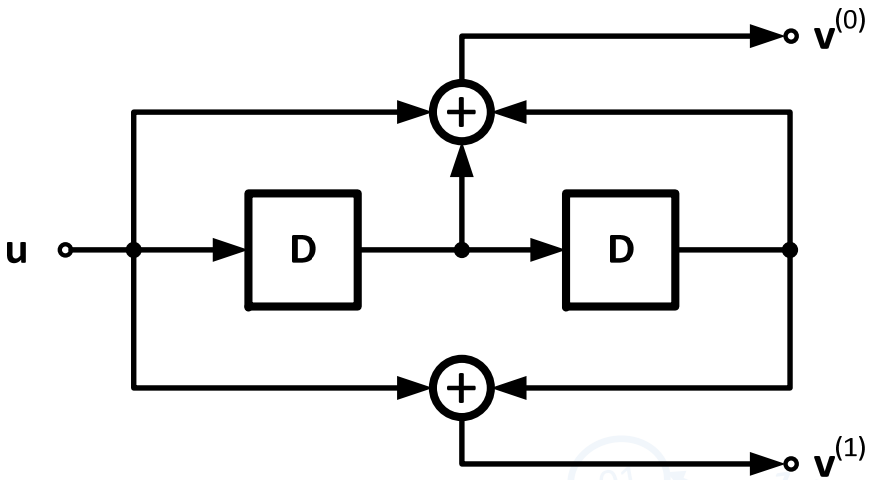
فیلد nextState:

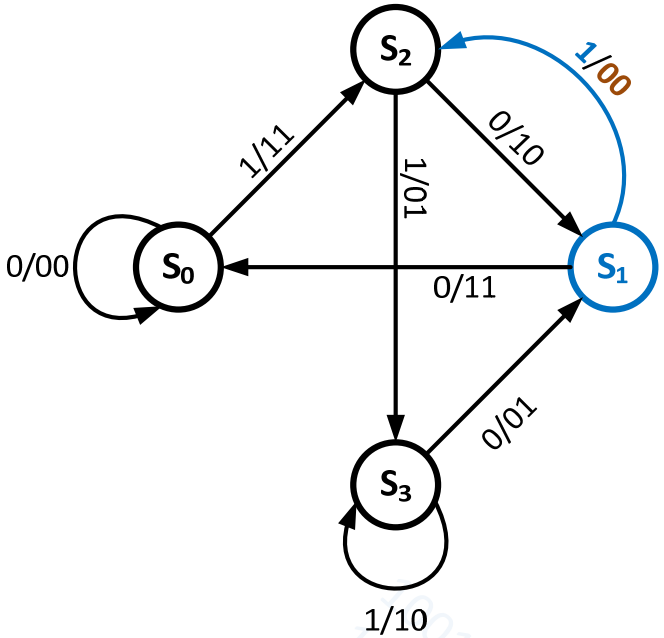
- نشان دهنده‌ی حالت بعدی سیستم به ازای حالت فعلی و ورودی‌ها است:
- هر سطر یک حالت فعلی
- هر ستون یک سمبل ورودی
- مقدار هر درایه: حالت بعدی

حالت فعلی	ورودی‌ها: 0	ورودی‌ها: 1
S_0	0	2
S_1	0	2
S_2	1	3
S_3	1	3

حالت بعدی

Example 4





>> tr4.outputs

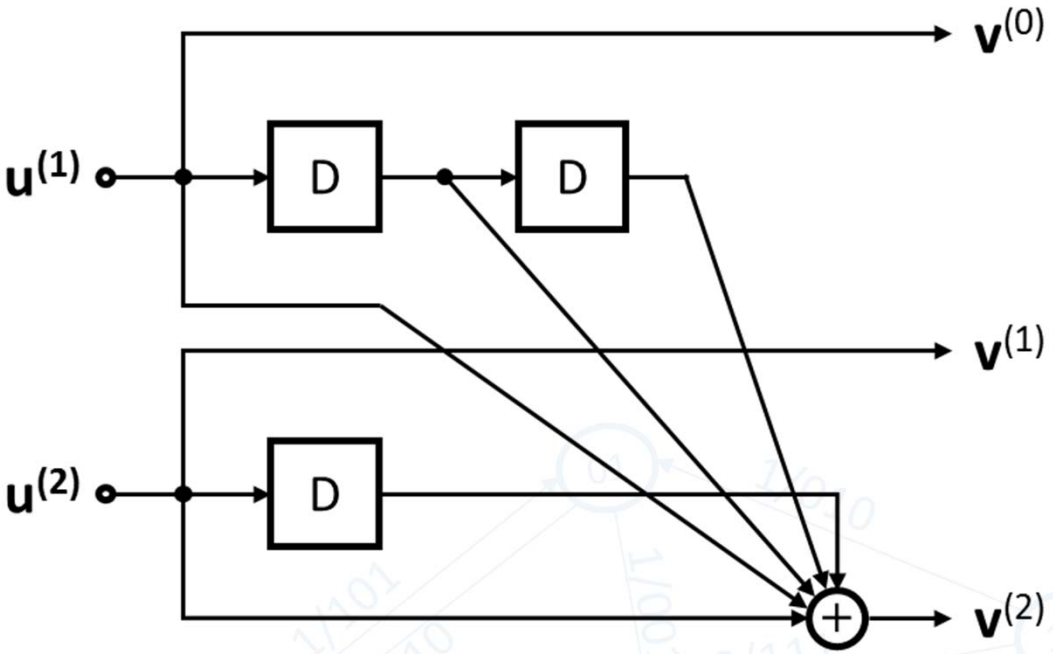
ans

حالت فعلی	ورودی‌ها: 0	ورودی‌ها: 1
S_0	0	3
S_1	3	0
S_2	2	1
S_3	1	2

خروجی

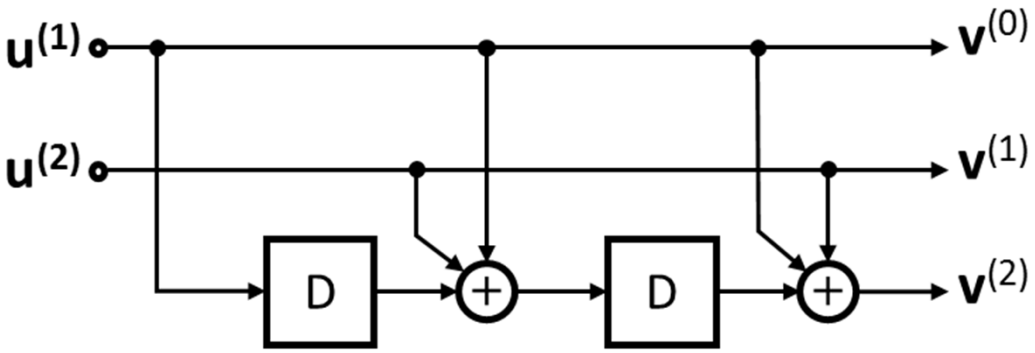
- فیلد outputs:
  - نشان دهنده‌ی خروجی سیستم به ازای حالت فعلی و ورودی‌ها است:
  - هر سطر یک حالت فعلی
  - هر ستون یک سمبل ورودی
  - مقدار هر درایه: خروجی

A rate R=2/3 systematic convolutional encoder



$$\mathbf{G}(D) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1+D+D^2 \\ 0 & 1 & 1+D \end{bmatrix}$$

A rate R=2/3 systematic convolutional encoder



$$v^{(0)}(D) = u^{(1)}(D)$$

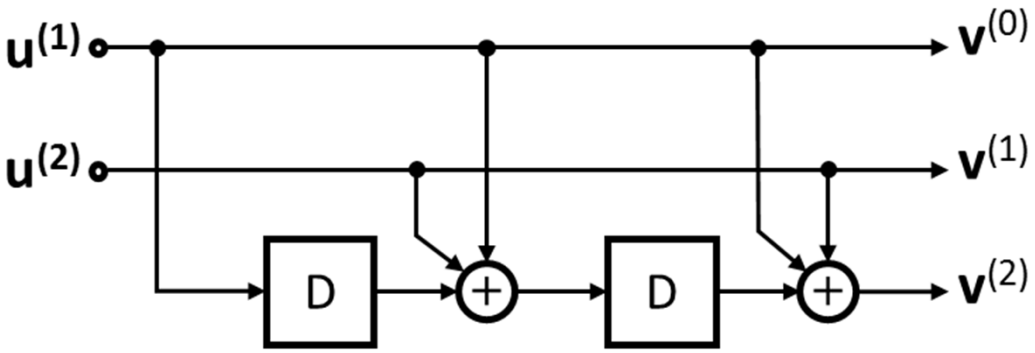
$$v^{(1)}(D) = u^{(2)}(D)$$

$$v^{(2)}(D) = \left[u^{(1)}(D)\times D + u^{(1)}(D) + u^{(2)}(D)\right]\times D + u^{(1)}(D) + u^{(2)}(D)$$

$$= D^2 u^{(1)}(D) + D u^{(1)}(D) + D u^{(2)}(D) + u^{(1)}(D) + u^{(2)}(D)$$

$$= u^{(1)}(D)\times\left[1 + D + D^2\right] \quad + \quad u^{(2)}(D)\times\left[1 + D\right]$$

A rate R=2/3 systematic convolutional encoder



$$\mathbf{G}(D)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1+D+D^2\\ 0 & 1 & 1+D\end{bmatrix}$$

$$v^{(0)}(D)=u^{(1)}(D)$$

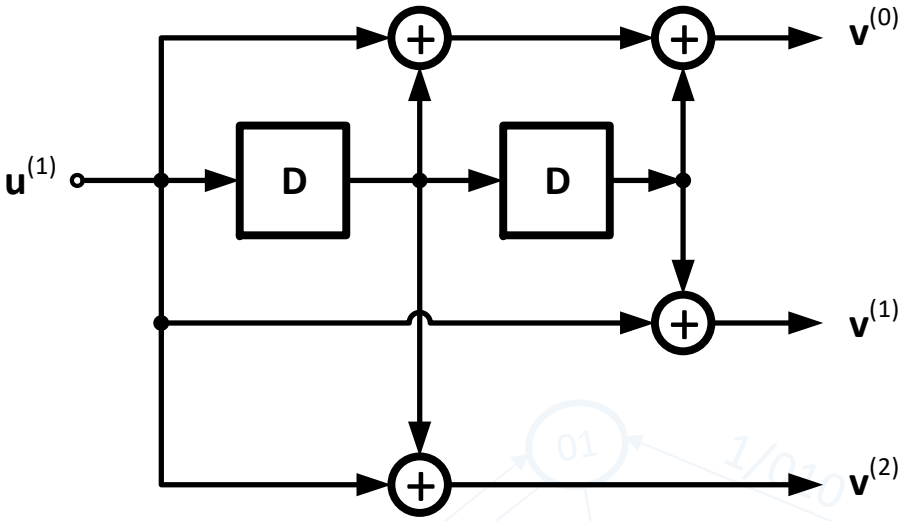
$$v^{(1)}(D)=u^{(2)}(D)$$

$$v^{(2)}(D)=\left[u^{(1)}(D)\times D+u^{(1)}(D)+u^{(2)}(D)\right]\times D+u^{(1)}(D)+u^{(2)}(D)$$

$$=D^2u^{(1)}(D)+Du^{(1)}(D)+Du^{(2)}(D)+u^{(1)}(D)+u^{(2)}(D)$$

$$=u^{(1)}(D)\times\left[1+D+D^2\right]\quad+\quad u^{(2)}(D)\times\left[1+D\right]$$

A rate R=1/3 non-systematic convolutional encoder

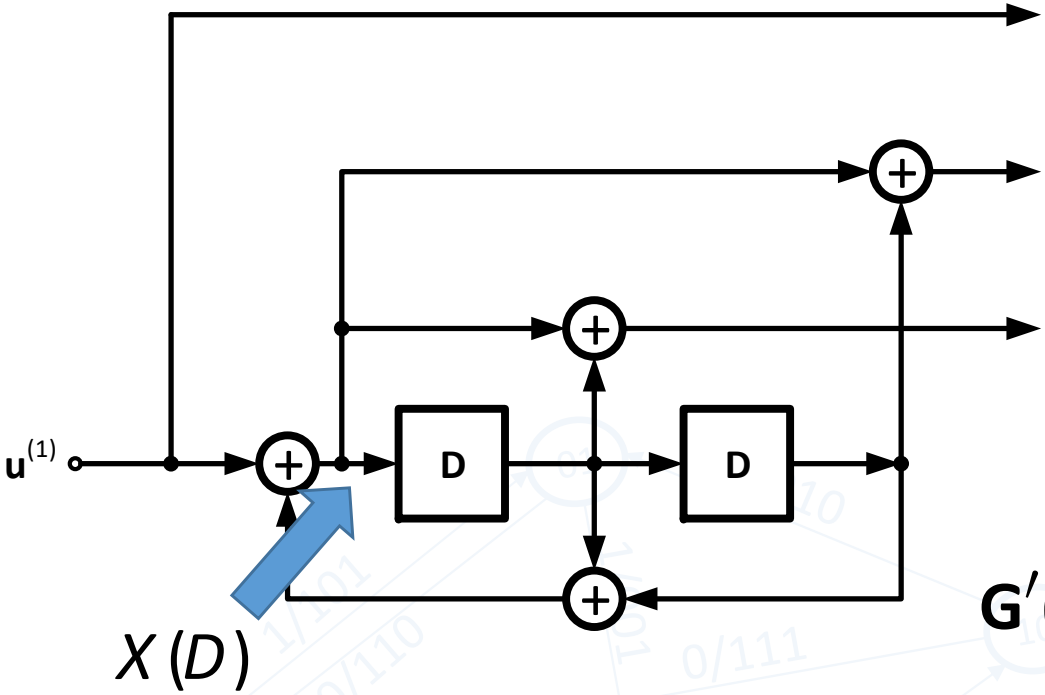


$$\mathbf{G}(D)=\begin{bmatrix}1+D+D^2 & 1+D^2 & 1+D\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}'(D)=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{1+D^2}{1+D+D^2} & \dfrac{1+D}{1+D+D^2}\end{bmatrix}$$

$$1+D^2 \;\Big|\; \frac{1+D+D^2}{1+D+D^2+D^4+D^5+D^7+D^8+\cdots}$$

A rate R=1/3 systematic convolutional encoder



$$\mathbf{v}^{(0)} = u^{(1)}(D) \qquad 10000000\ldots$$

$$\mathbf{v}^{(1)} = X(D)\left[1+D^2\right] \qquad 111011011\ldots$$

$$\mathbf{v}^{(2)} = X(D)\left[1+D\right] \qquad 10110110\ldots$$

$$\mathbf{G}'(D) = \left[1 \quad \frac{1+D^2}{1+D+D^2} \quad \frac{1+D}{1+D+D^2}\right]$$

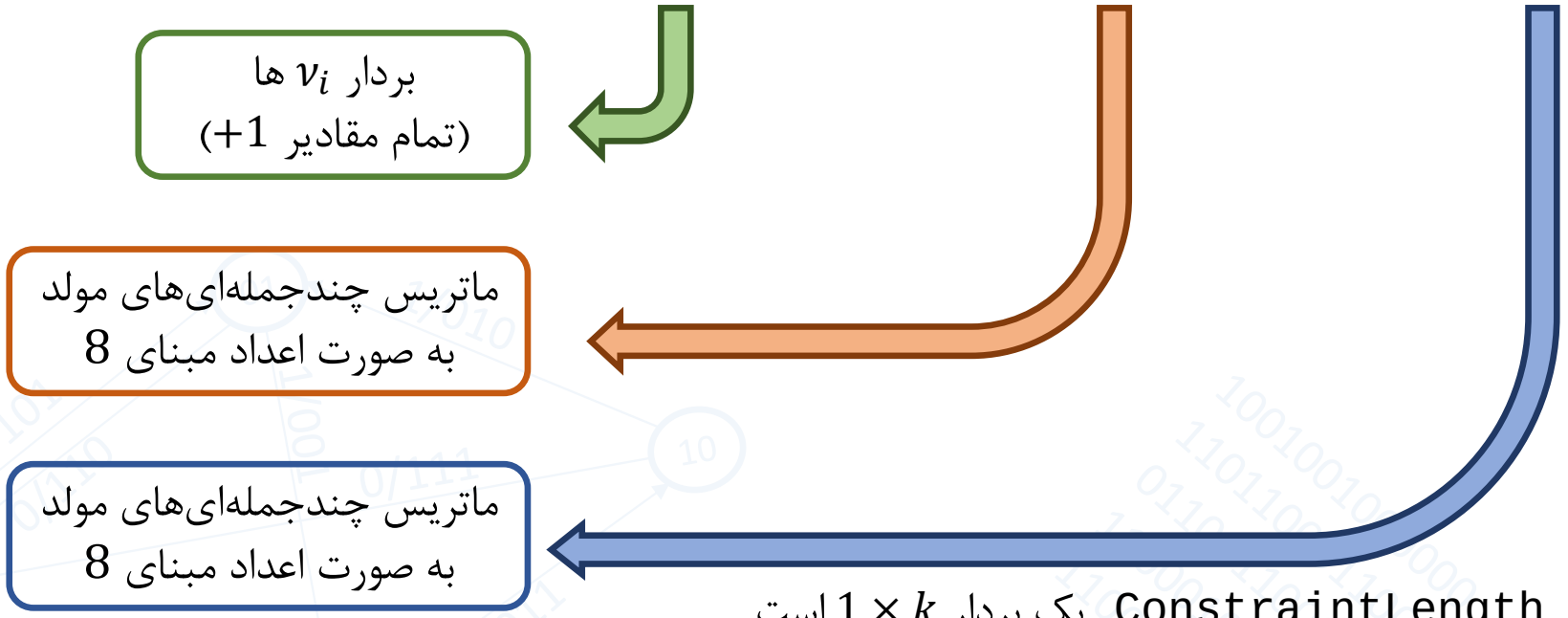
$$X(D) = u^{(1)}(D) + X(D)\left[D+D^2\right]$$

$$X(D) = \frac{1}{1+D+D^2}u^{(1)}(D)$$

Representing convolutional encoders in Matlab using polynomials

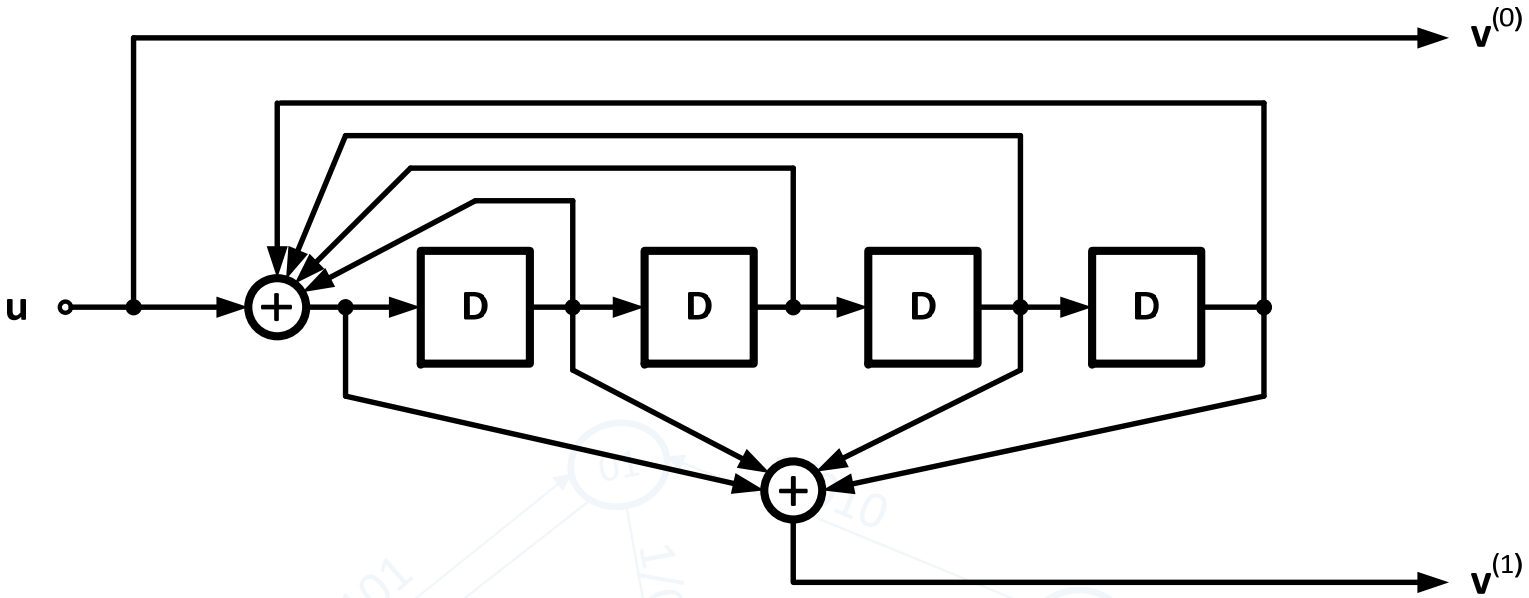
➢ برای encoder های feedback:

```
trellis = poly2trellis(ConstraintLength,CodeGenerator, Feedback)
```



- `ConstraintLength` یک بردار $k \times 1$ است.
- `CodeGenerator` یک ماتریس $k \times n$ است (صورت توابع تبدیل).
- `Feedback` یک بردار $k \times 1$ است (مخرج توابع تبدیل).

Example 3:



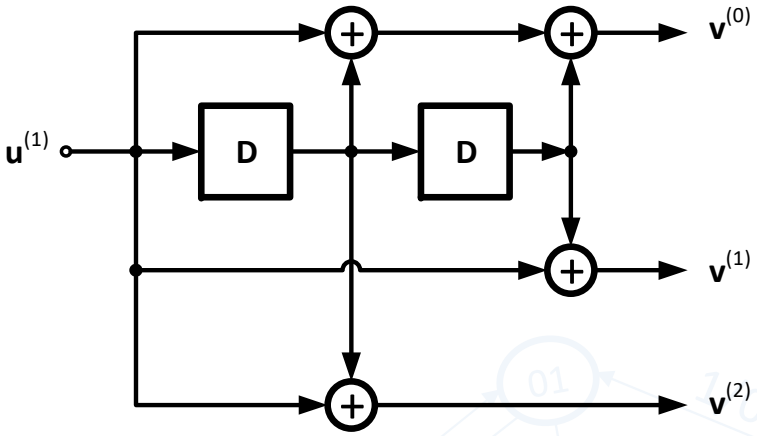
$$G(D) = \left[1 \quad \frac{1 + D + D^3 + D^4}{1 + D + D^2 + D^3 + D^4}\right]$$

- دستور Matlab:

```
tr3 = poly2trellis(5,[37 33],37)
```

A rate R=1/3 convolutional encoder

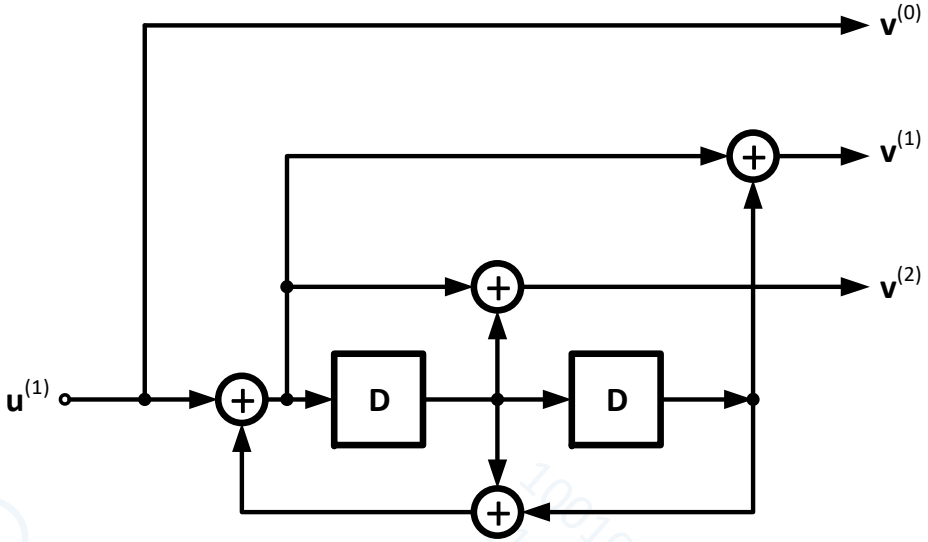
Feed-forward Non-systematic encoder



$$\mathbf{G}(D) = \begin{bmatrix} 1+D+D^2 & 1+D^2 & 1+D \end{bmatrix}$$

- به ازای $\mathbf{u} = [1000000\ldots.]$:
  - 1110000000
  - 1010000000
  - 1100000000

Feedback systematic encoder

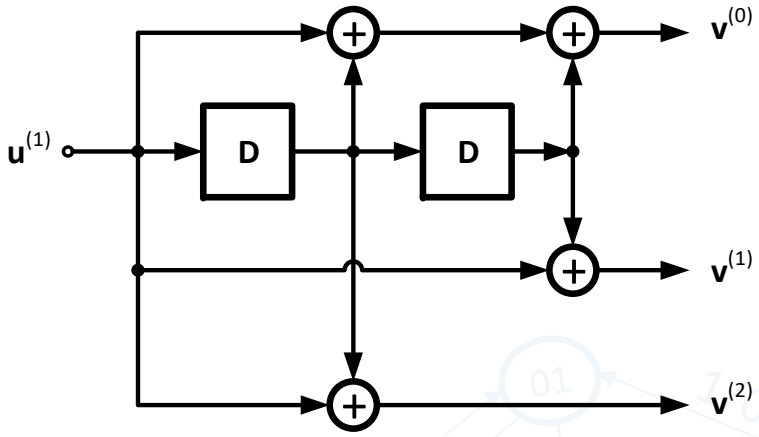


$$\mathbf{G}'(D) = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1+D^2}{1+D+D^2} & \dfrac{1+D}{1+D+D^2} \end{bmatrix}$$

- به ازای $\mathbf{u} = [1000000\ldots.]$:
  - 1000000000
  - 1110110110
  - 1011011011

A rate R=1/3 convolutional encoder

Feed-forward Non-systematic encoder



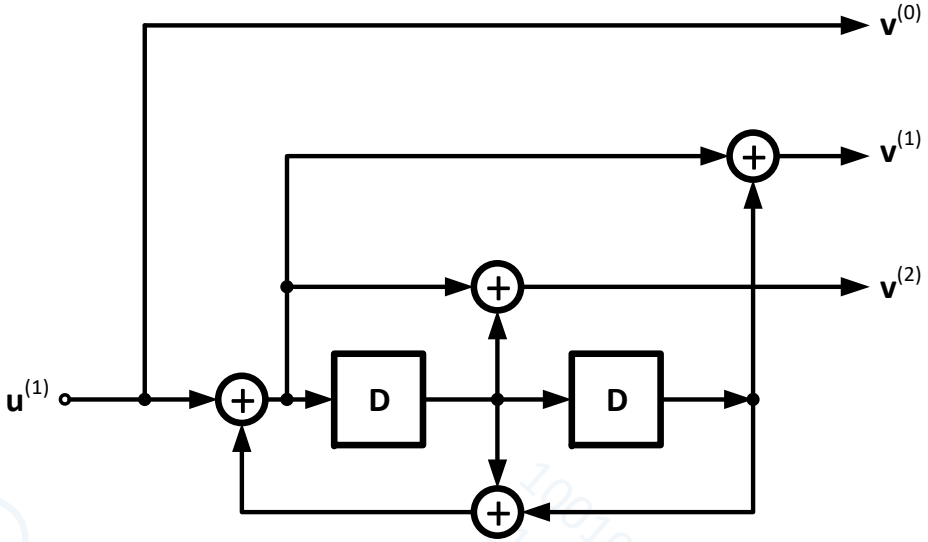
$$\mathbf{G}(D) = \left[1 + D + D^2 \quad 1 + D^2 \quad 1 + D\right]$$

$$u(D) = \frac{1}{1 + D + D^2} = 1 + D + D^3 + D^4 + D^6 + \ldots$$

- به ازای $\mathbf{u} = [110110110\ \ldots]$:

  1000000000
  1110110110
  1011011011

Feedback systematic encoder



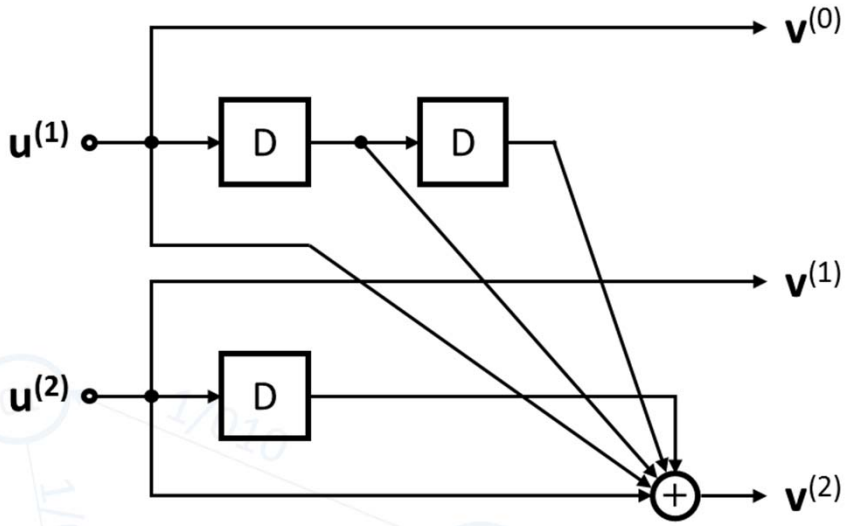
$$\mathbf{G}'(D) = \left[1 \quad \frac{1 + D^2}{1 + D + D^2} \quad \frac{1 + D}{1 + D + D^2}\right]$$

- به ازای $\mathbf{u} = [1000000\ \ldots.]$:

  1000000000
  1110110110
  1011011011

تمرین

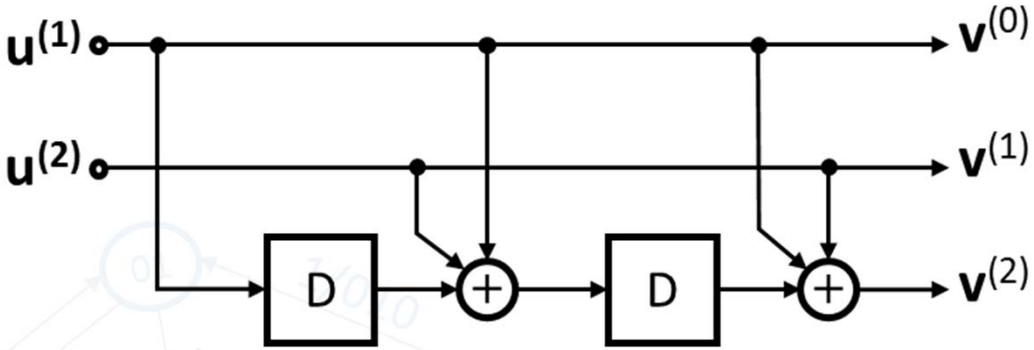
- با استفاده از poly2trellis برای مدار شکل زیر، ساختار trellis را به دست آورید.



- با استفاده از comm.ConvolutionalEncoder کلمهٔ کد متناظر با پیام $\mathbf{u} = [100101]$ را به دست آورید.
- با استفاده از comm.ViterbiDecoder محتمل‌ترین پیام متناظر با کلمهٔ دریافتی زیر را به دست آورید:
$\mathbf{r} = [110\ 011\ 000\ 110\ 011\ 101\ 110\ 011\ 100\ 111]$.

تمرین

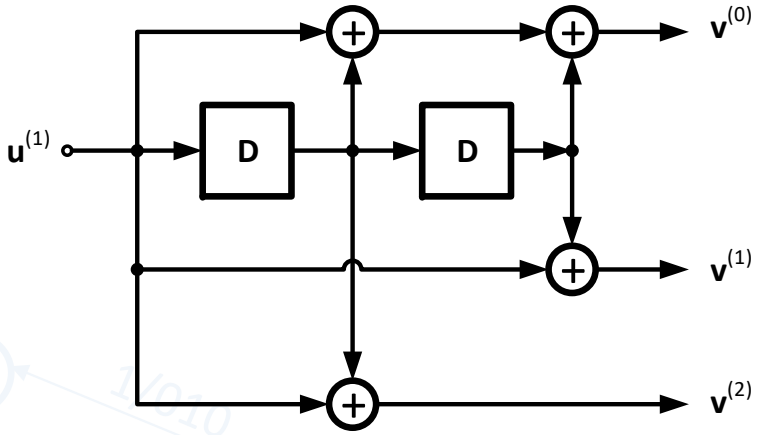
- ساختار trellis را برای encoder زیرمعرفی کنید.



- با استفاده از comm.ConvolutionalEncoder کلمهٔ کد متناظر با پیام $\mathbf{u} = [100101]$ را به دست آورید.
- با استفاده از comm.ViterbiDecoder محتمل‌ترین پیام متناظر با کلمهٔ دریافتی زیر را به دست آورید:
$\mathbf{r} = [110\ 011\ 000\ 110\ 011\ 101\ 110\ 011\ 100\ 111]$.

تمرین

- با استفاده از poly2trellis برای مدار شکل زیر، ساختار trellis را به دست آورید.



- با استفاده از comm.ConvolutionalEncoder پاسخ ضربه را به دست آورید.
- با استفاده از comm.ConvolutionalEncoder کلمهٔ کد متناظر با پیام زیر را به دست آورید:

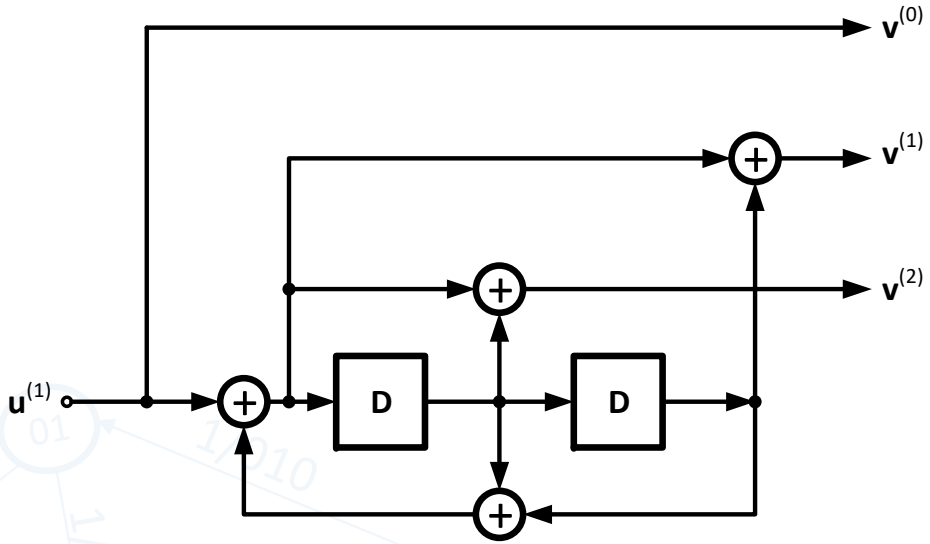
$$\mathbf{u} = [110\ 110\ 110\ 110\ 110\ 110\ 110\ 110\ 110\ 110\ 110\ 110]$$

- با استفاده از comm.ViterbiDecoder محتمل‌ترین پیام متناظر با کلمهٔ دریافتی زیر را به دست آورید:

$$\mathbf{r} = [110\ 011\ 000\ 110\ 011\ 101\ 110\ 011\ 100\ 111].$$

تمرین

- با استفاده از poly2trellis برای مدار شکل زیر، ساختار trellis را به دست آورید.



- با استفاده از comm.ConvolutionalEncoder پاسخ ضربه را به دست آورید.
- با استفاده از comm.ConvolutionalEncoder کلمهٔ کد متناظر با پیام زیر را به دست آورید:

$$\mathbf{u} = [110\ 110\ 110\ 110\ 110\ 110\ 110\ 110\ 110\ 110\ 110\ 110]$$

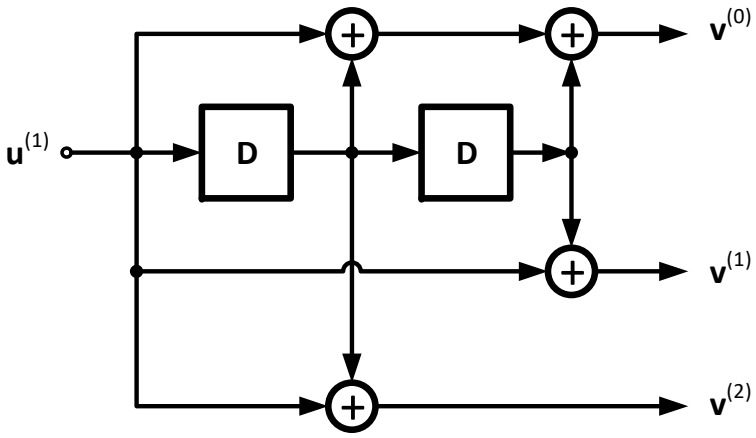
- با استفاده از comm.ViterbiDecoder محتمل‌ترین پیام متناظر با کلمهٔ دریافتی زیر را به دست آورید:

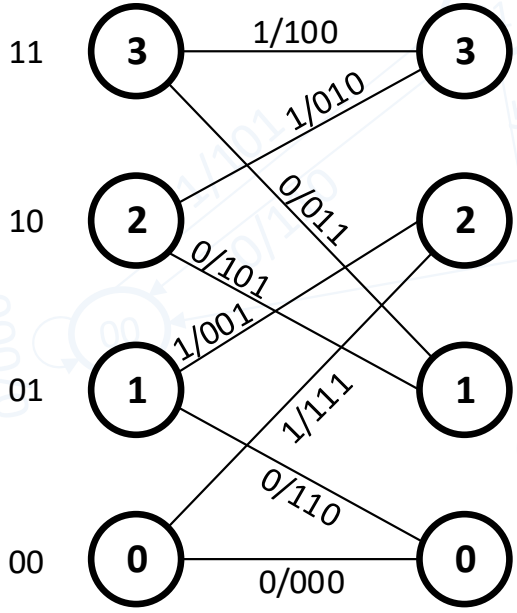
$$\mathbf{r} = [110\ 011\ 000\ 110\ 011\ 101\ 110\ 011\ 100\ 111].$$

- پاسخ قسمت اول و سوم را با استفاده از پاسخ‌های صفحهٔ قبل به دست آورید.

الگوریتم Viterbi برای کدهای دارای feedback

- حالت‌ها





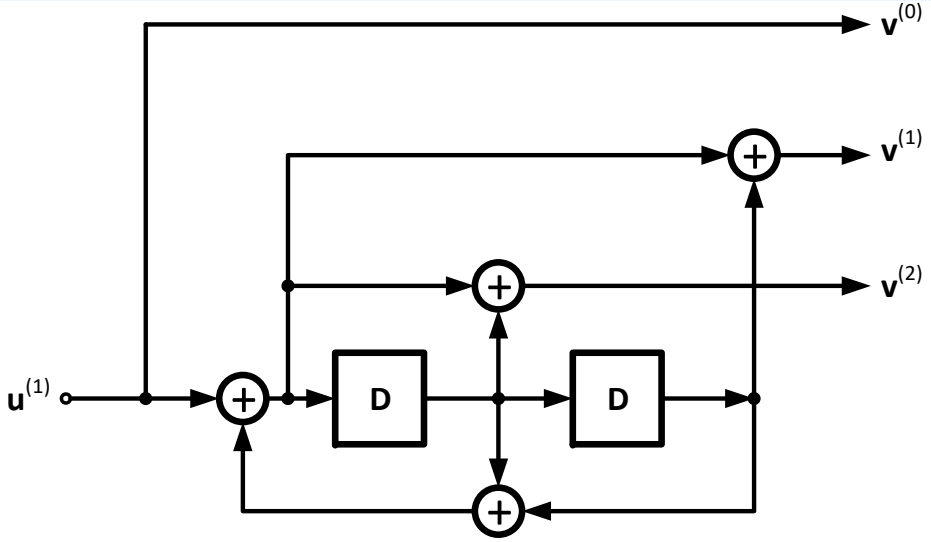

```
>> trFF.nextStates

ans =

     0     2
     0     2
     1     3
     1     3
```

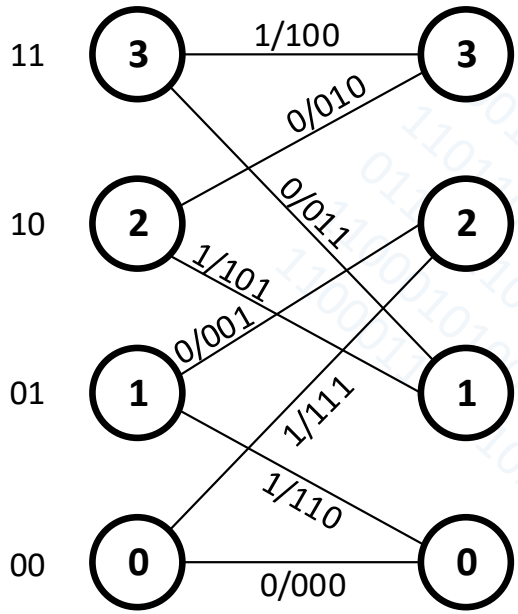
```
>> trFF.outputs

ans =

     0     7
     6     1
     5     2
     3     4
```

الگوریتم Viterbi برای کدهای دارای feedback

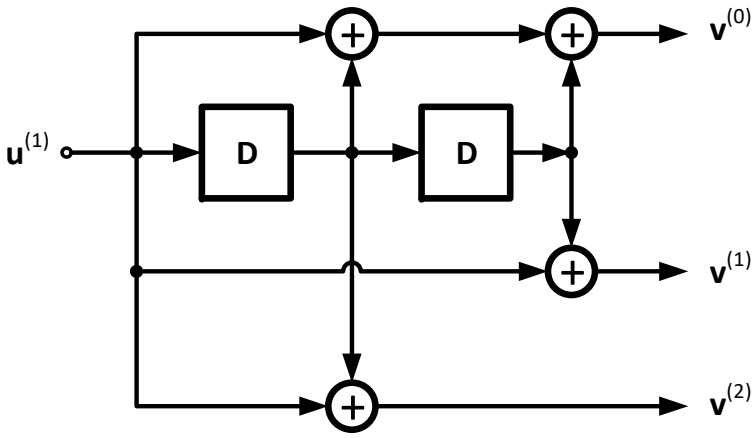
حالت‌ها

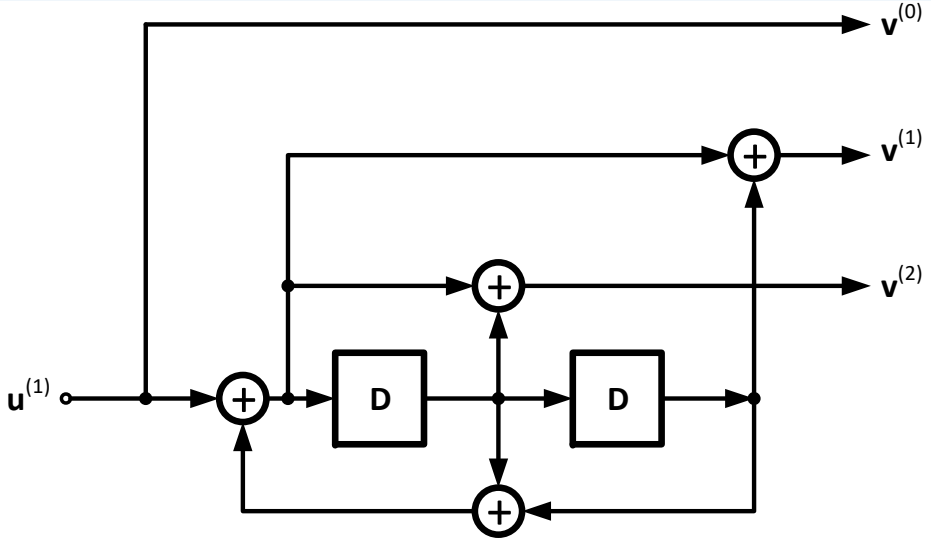
```
>> trFB.nextStates

ans =

     0     2
     2     0
     3     1
     1     3

>> trFB.outputs

ans =

     0     7
     1     6
     2     5
     3     4
```



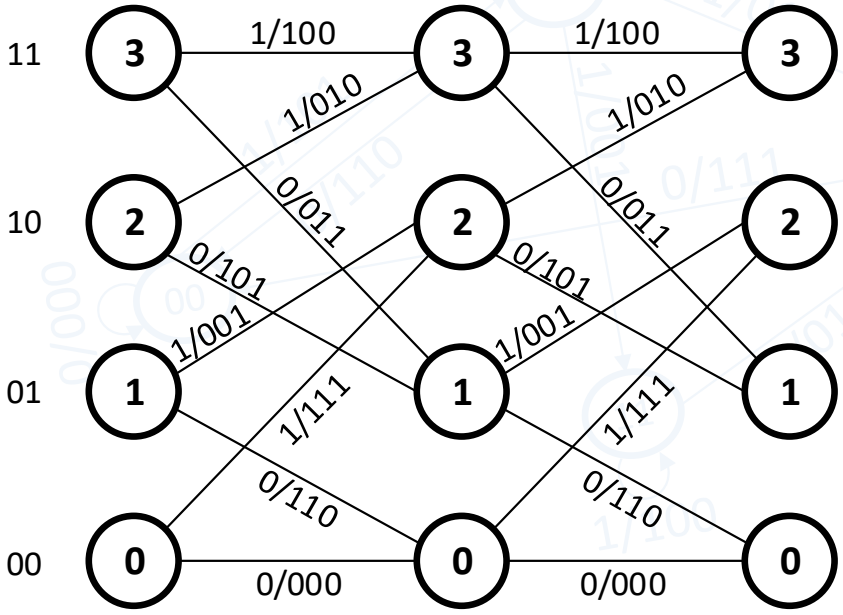


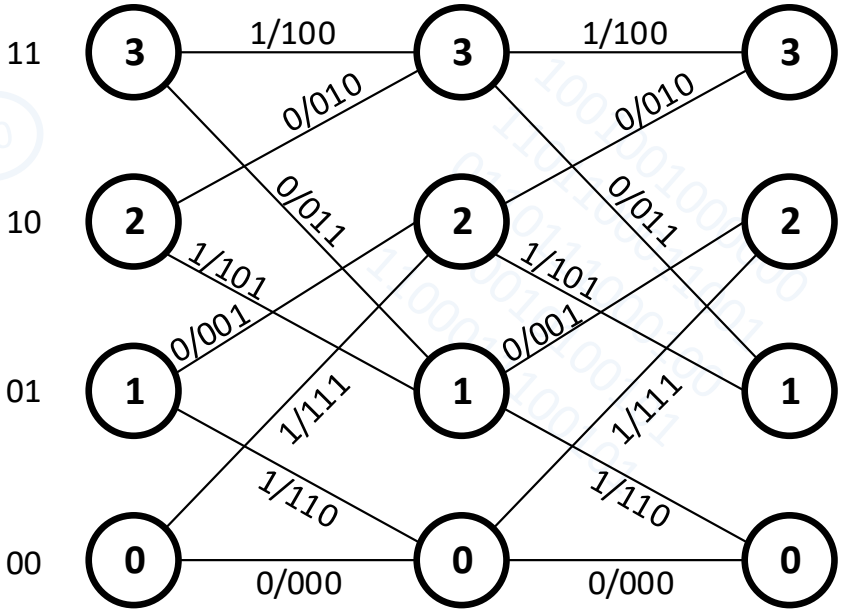
الگوریتم Viterbi برای کدهای دارای feedback





بازگشت به صفر

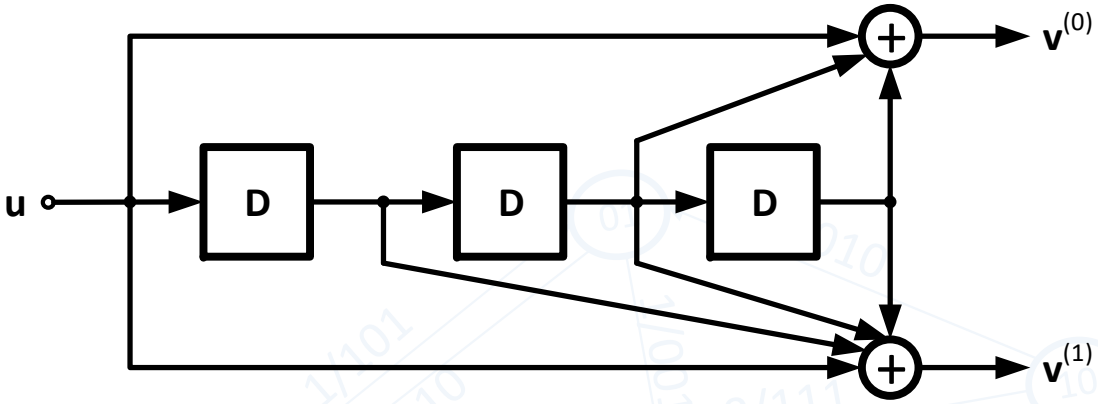




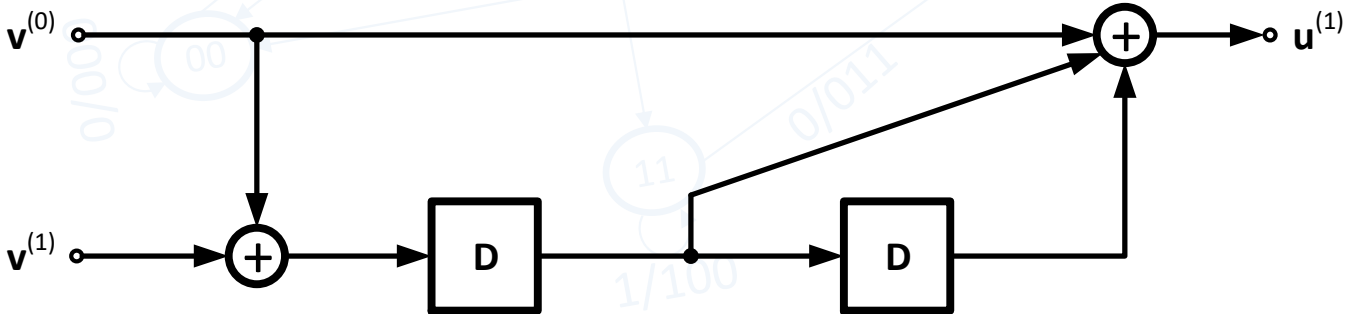
Feed-forward inverse and Catastrophic encoders

Feed-forward inverse

$$\mathbf{G}(D)\mathbf{G}_{\mathbf{i}}(D) = \mathbf{I}D^{l} \qquad \text{GCD}\left\{\mathbf{G}^{(1)}(D), \mathbf{G}^{(1)}(D)\right\} = 1$$



$$\mathbf{G}(D) = [1 + D^2 + D^3 \quad 1 + D + D^2 + D^3]$$



Feed-forward inverse and Catastrophic encoders

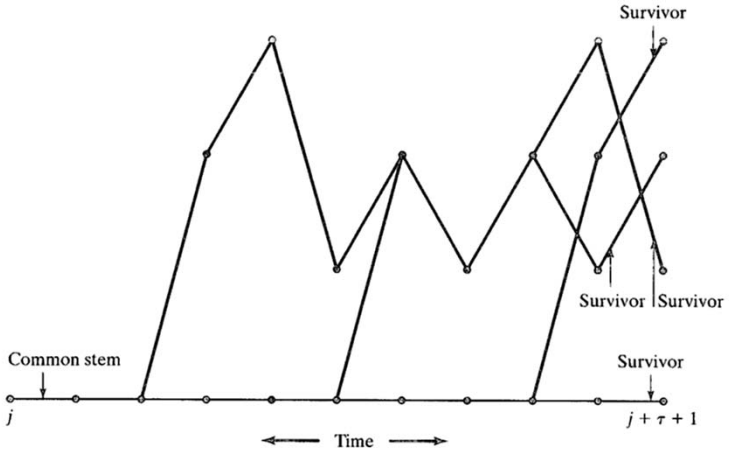
- یک کد catastrophic

$$\mathbf{G}(D)=\begin{bmatrix}1+D & 1+D^2\end{bmatrix}$$

- خروجی به ازای $\mathbf{u}=[11111111...]$

مشکلات پیاده‌سازی عملی الگوریتمViterbi

- حافظهٔ decoder



- حافظهٔ مسیر
  - Trace-back
- همزمان‌سازی
  - Frame
  - Bit
- Quantization
  - Hard
  - Soft
- نرخ
  - Tailbitting